

DYNAMIKA

STAVEBNÍCH KONSTRUKCÍ

Konstrukce citlivé na dynamické zatížení – štíhlé konstrukce



Vítr



Chodci
Vítr



Vítr



Vítr



Vítr
Chodci

Vlastislav Salajka



Vítr

Vítr



Účinky strojů

turbíny



kolo turbíny



generátor

Účinky strojů – na okolní objekty – tech. seizmicita



Účinky dopravy



Účinky dopravy

Účinky dopravy – na okolní objekty – tech. seizmicita

Účinky dopravy – na histor. objekty – tech. seizmicita

Účinky dopravy



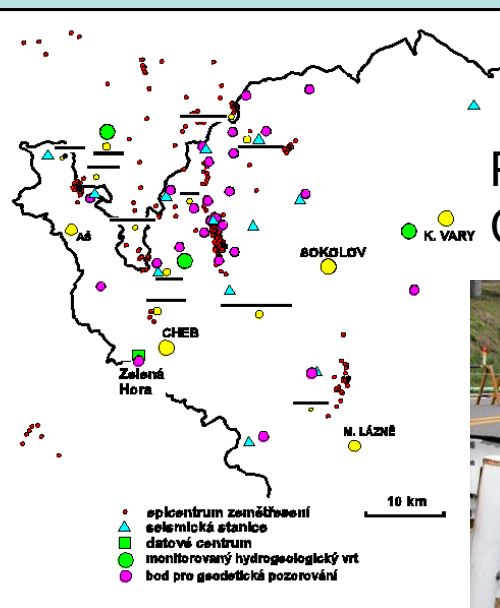
Přírodní seizmicita - zemětřesení

Mexiko

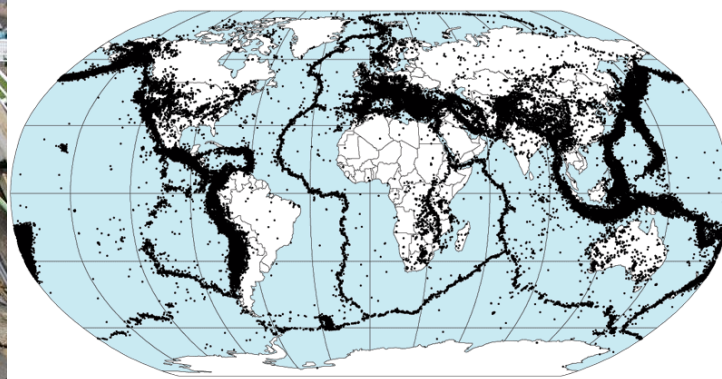
Mexico City 1985



Přírodní seizmicita ČR



Preliminary Determination of Epicenters
358,214 Events, 1963 - 1998



Japonsko

POSUZOVÁNÍ STAVEBNÍCH KONSTRUKCÍ VYSTAVENÝCH DYNAMICKÝM ÚČINKŮM

Dynamicky proměnné zatížení – silami nebo přemístěním částí konstrukce (dynamický – v čase se měnící)

Cílem je najít se **odezvu na dynamické zatížení - měření nebo výpočet**

Výpočet – deterministický nebo stochastický

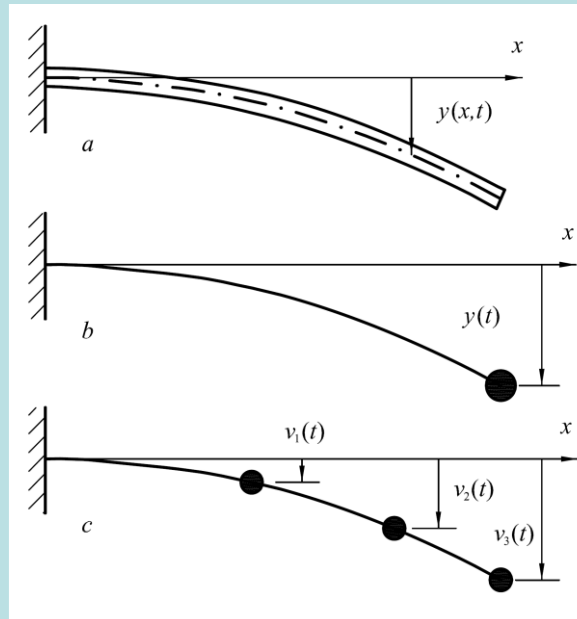
Výpočet – je nutno vydefinovat (sestavit, popsat) – nejčastěji MKP

Výpočtový model konstrukce

a – spojitý model
(parciální diferenciální rovnice)

b – diskrétní model
s jedním stupněm volnosti
obyč. dif. rovnice

c – diskrétní model
se třemi stupni volnosti.
obyč. diferenciální rovnice



Výpočtový model konstrukce mostu
MKP 30 tis. stupňů volnosti

Výpočtový model zatížení

Deterministický model zatížení

- a) Zadán funkcí
- b) Zadán tabulkou

Stochastický model zatížení
zatížení známo pouze ve smyslu
statistického vyjádření



Požadavky na výpočtové (matematické) modely konstrukce

- model má vystihnout (v metodě konečných prvků) nejvěrněji geometrii nosného systému konstrukce
- model musí zahrnout co nejlépe **mechanické vlastnosti** skutečné konstrukce

Mechanické vlastnosti (tuhost, hmotnost a útlum)

a) Statické

b) Dynamické

Materiálové vlastnosti jsou závislé na rychlosti zatěžování (např. je nutno rozlišovat statické a dynamické moduly pružnosti)

U statických modelů – tuhost konstrukce (materiálové modely a geometrické uspořádání)

U dynamických modelů navíc **rozdělení hmotnosti** v konstrukci a **útlumové vlastnosti** částí konstrukce

Statické modely se nemusí hodit pro dynamické výpočty (části konstrukce a zatížení jsou modelovány přímo jako zatížení silami. U dynamických modelů se části konstrukcí musí uvažovat jako tělesa spojená s konstrukcí. Tělesa mají svou hmotnost popř. hmotné momenty setrvačnosti), nelze je zaměnit silami a momenty jak se často děje při řešení statiky. Uvažuje se, že část sněhu, vody v nádržích, sypaného materiálu je spolu kmitající hmotnost přidaná k nosným konstrukcím. Zbylá část je „čistě“ silové statické zatížení. Obdobně se přidává hmotnost částí podzákladí (zemina, hornina) do hmotnosti základu.

Vliv okolního prostředí

Konstrukce je obklopena prostředím, které na ni působí

Prostředí se nahrazuje modely charakterizující účinky prostředí

Účinky statické a dynamické

Statické – vlastní tíha konstrukce

- tíha technologie uložená na konstrukci
- zatížení sněhem, statická složka větru, námraza
- propojení se sousedními konstrukcemi
- uložení konstrukce (model vazby mezi konstrukcí a podzákladem)
- pokles podpor
- teplotní pole atd.

Dynamické – vítr (dynamický model zatížení větrem)

- pohyb základu (model seizmického buzení – akcelerogramy, spektra)
- nevývažky rotujících částí strojů (náhrada budicími silami)
- výbuch (náhrada v čase proměnným zatížením – tlakem)
- dopravní proud (model zatížení vozidla, chodci apod.)
- rázy (stavební a strojní technologie, vodní ráz atd.) atd.

Náhrada skutečných účinků na konstrukci se řeší sestavením modelu zatížení, který se aplikuje na model konstrukce!

Řešení přímé je značně náročné a provádí se zřídka

Z hlediska sestavování rovnic a řešení se zatížení dělí na **silové** a **kinematické**

NÁVRH A POSUZOVÁNÍ DYNAM. NAMÁHANÝCH KONSTRUKCÍ

Návrh konstrukce – výkres. dokumentace, geologie, technický popis atd.

Analýza konstrukce s posouzením – výpočet, posouzení podle norem

Experimentální ověření konstrukce – experiment v souladu s předpisy a normami



Analýza konstrukce – vytvoření matematického popisu konstrukce a zatížení
(abstraktní modely konstrukce a zatížení)

OBECNÉ ZÁSADY PŘI POSUZOVÁNÍ DYNAMICKY NAMÁHANÝCH KONSTRUKCÍ

OBJEKTY MAJÍ PO CELOU DOBU ŽIVOTNOSTI VYHOVOVAT SVÉMU ÚČELU!

Z tohoto hlediska vyplývají pro staticky a dynamicky namáhané konstrukce stavebních objektů dva požadavky:

1. Bezpečnost
2. Provozní způsobilost

Bezpečnost – posuzování převážně podle zásad ČSN 73 00 31

Provozní způsobilost – dynamické namáhání konstrukcí

1. Účinky kmitání na lidi
2. Účinky kmitání na měřicí a jiné přístroje
3. Účinky kmitání na strojní a jiná technologická zařízení
4. Účinky kmitů šířících se podložím na stavební objekty a provozy

Kritéria bezpečnosti a provozní způsobilosti

- až na výjimky podle 1. a 2. mezního stavu

1. mezní stav – stav únosnosti

- nejnejpříznivější kombinace statických a dynamických účinků (přihlíží se k působení během provádění stavby, k únavě materiálu apod.)

Extrémní napjatost musí vyhovovat podmínce

$$|S_{st}| + |\text{extr } S_{dyn}| \leq |S_u|$$

S_{st} – napětí, vnitřní síla od výpočtového statického účinku

$\text{extr } S_{dyn}$ – extrém téhož napětí, vnitřní síly od výpočtového dynamického účinku

S_u – mezní hodnota posuzované veličiny stanovená podle příslušných norem

Posouzení na únavu – konstrukční prvky a detaily

Únava materiálu - výrazné snížení meze pevnosti materiálu v závislosti na:

charakteru zatížení, změně napětí (pulzující, míjivá, střídavá), úroveň vytížení průřezu, počet cyklů, tvar namáhaného prvku, prostředí, úpravě povrchu atd.

2. mezní stav – přemístění, přetvoření

- kombinace statických a dynamických účinků, které jsou obvyklé při běžném provozu.

K nejextrémnějším kombinacím (výjimečným) se nepřihlíží

Extrémní hodnoty přemístění musí vyhovovat podmínce

$$|u_{st}| + |\text{extr } u_{dyn}| \leq |u_u|$$

u_{st} – přemístění od statického účinku

$\text{extr } u_{dyn}$ – extrémní přemístění od dynamického účinku

u_u – mezní hodnota posuzované veličiny, stanovené dle příslušných norem

Méně významné stavby – zjednodušení posouzení

1. Velikost extrémních statických přemístění se posoudí podle statických kritérií samostatně
2. Namísto hodnocení absolutních extrémů přemístění se posuzuje odolnost konstrukce vůči vibracím podle kritéria

$$|\text{extr } X_{dyn}| \leq |X_{u \text{ dyn}}|$$

$\text{extr } X_{dyn}$ – značí absolutní extrém rychlostí a zrychlení pole přemístění než extrémní hodnoty přemístění.

$X_{u \text{ dyn}}$ – mezní hodnota posuzované dynamické veličiny

Účinky kmitání na člověka

Účinky kmitání na běžné stavby

Účinky kmitání na strojní a jiná technologická zařízení

Účinky kmitání na člověka

Kmitání narušuje od určité intenzity psychosomatickou rovnováhu člověka

Nepříznivé účinky kmitání se projevují zvýšenou únavou a vibrace jisté intenzity poškozují zdraví

Podrobnosti jsou uvedeny v Nařízení vlády č. 241/2018 Sb. (148/2006, 258/2000, 272/2011, 217/2016)

o ochraně zdraví před nepříznivými účinky hluku a vibrací

a upraveny normou ČSN ISO 2631 Vibrace a rázy - Hodnocení expozice člověka celkovým vibracím

Převládá názor, že pro rozsah od 1 do 10 Hz je intenzita vnímání úměrná zrychlení, zatímco v rozsahu nad 10 Hz je úměrná rychlosti

Účinky kmitání na běžné stavby

Norma ČSN 73 0032 dělí běžné stavby na 3 třídy z hlediska jejich odolnosti vůči vibracím

A – Budovy, u nichž mohou vzniknout trhlinky v omítce nebo jiné viditelné poruchy, stavby z neopracovaného kamene...

B – Běžné cihelné stavby, stavby z bloků, prefabrikátů... Neporušené budovy v dobrém stavebně technickém stavu

C – Dobře vyztužené stavby, s kvalitně provedenou železobetonovou nebo ocelovou kóstrou, dokonale vyhotovené dřevěné konstrukce

TŘÍDA ODOLNOSTI KONSTRUKCE	KMITÁNÍ VYVOLANÉ OBČASNÝM IMPULZOVÝM ZATÍŽENÍM		KMITÁNÍ VYVOLANÉ PERIODICKÝM ZATÍŽENÍM	
	KMITOČTY 1 AŽ 10 Hz	KMITOČTY 10 AŽ 100 Hz	KMITOČTY 1 AŽ 10 Hz	KMITOČTY 10 AŽ 100 Hz
	ZRYCHLENÍ mm/s ²	RYCHLOST mm/s	ZRYCHLENÍ mm/s ²	RYCHLOST mm/s
A	125	2	63	1
B	250	4	150	2,5
C	630	10	380	6

Hodnoty dle metodiky „Swiss standard“

	Frekvenční rozsah použití [Hz]	Maximální rychlost v_i [mm·s ⁻¹]	Maximální svislá složka v_{max} [mm·s ⁻¹]
Citlivé a historické objekty	10 ÷ 30	3	1,8 ÷ 3
	30 ÷ 60	3 ÷ 5	1,8 ÷ 5
Zděné objekty s horní částí dřevěnou	10 ÷ 30	5	3 ÷ 5
	30 ÷ 60	5 ÷ 8	3 ÷ 8
Betonové nebo zděné budovy na betonových základech	10 ÷ 30	8	4,8 ÷ 8
	30 ÷ 60	8 ÷ 12	4,8 ÷ 12
Železobetonové, ocelové průmyslové objekty	10 ÷ 30	12	7,2 ÷ 12
	30 ÷ 60	12 ÷ 18	7,2 ÷ 18

Účinky kmitání na strojní a jiná technologická zařízení

Třída I – zvláště přesné stroje
a automaty.

Třída II – brusky, přesné
kovoobráběcí stroje, brousící
automaty a jiné přesné stroje

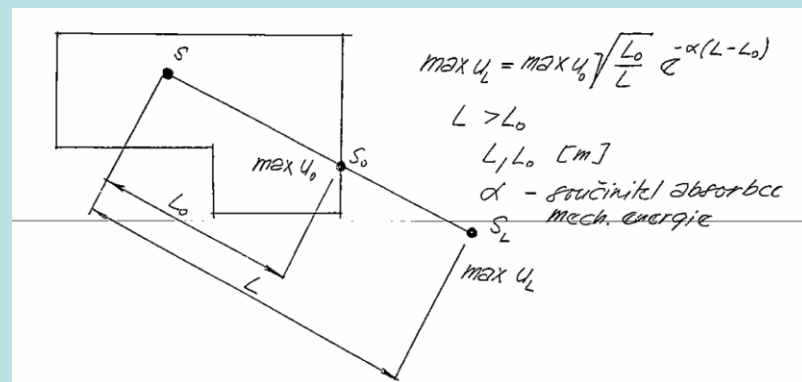
Třída III – kovoobráběcí stroje obvyklé
přesnosti, přádací, tkalcovské a
tiskařské stroje

Třída IV – ventilátory, elektromotory,
lisy, šicí stroje, ap.

TŘÍDA STROJE	CITLIVOST STROJNÍHO ZAŘÍZENÍ VŮČI VIBRACÍM	KMITOČTY DO 10 Hz	KMITOČTY NAD 10 Hz
		PŘÍPUSTNÁ ZRYCHLENÍ V mm/s ²	PŘÍPUSTNÁ RYCHLOST V mm/s
I	VYSOCE CITLIVÉ STROJE	6,3	0,1
II	STŘEDNĚ CITLIVÉ STROJE	63	1,0
III	MÁLO CITLIVÉ STROJE	250	4,0
IV	NECITLIVÉ STROJE	NAD 250	NAD 4,0

Účinky kmitů šířících se podloží na stavební objekty a provozy

Šíření kmitání směrem od zdroje – přibližný výpočet



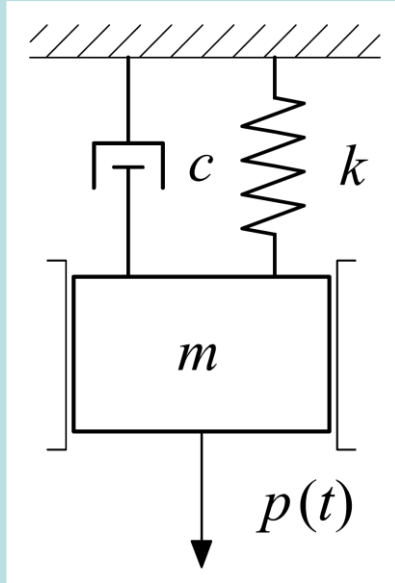
	Druh základové půdy	Součinitel absorpce α (m ⁻¹)
1	BAHNITÉ ZEMINY	0
2	JEMNOZRNITÉ PÍSKY A PÍŠČITÉ HLÍNY NASYCENÉ VODOU	0,03 AŽ 0,04
3	JÍLOVITÉ PÍSKY, HLÍNY A PÍŠČITÉ HLÍNY	0,03 AŽ 0,05
4	STŘEDNĚ AŽ HRUBĚ ZRNITÉ PÍSKY, VLHKÉ A PÍŠČITÉ HLÍNY	0,04 AŽ 0,06
5	SUCHÉ A TVRDÉ HLÍNY, PÍŠČITÉ HLÍNY	0,08 AŽ 0,10
6	SKALNÍ A POLOSKALNÍ HORNINY	0,10 AŽ 0,15

ZÁKLADY KMITÁNÍ STAVEBNÍCH KONSTRUKCÍ

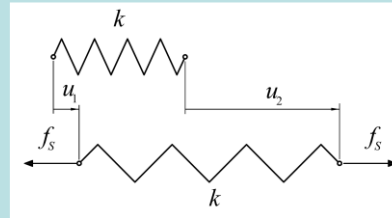
Výchozí předpoklady

- Nosný systém konstrukce je tvarově určitý
- Materiál nosných částí je lineárně pružný
- Vyšetřují se malé kmity





1 Nehmotná pružina k

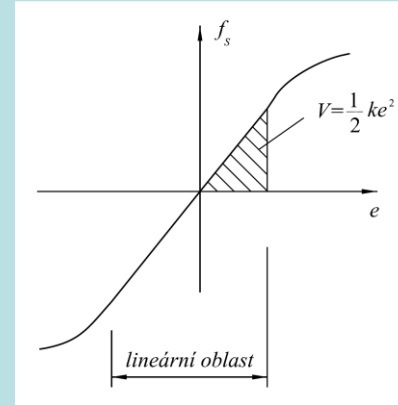


Prodloužení pružiny

$$\Delta u = u_2 - u_1$$

Vztah mezi silou a prodloužením pružiny nebo momentem a pootočením $f_s = k \Delta u$

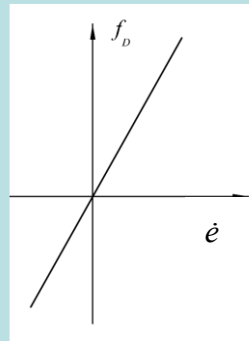
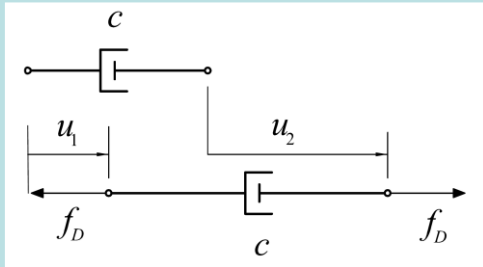
k je pružnostní konstanta [N/m] a nebo [N.m/rad]



Energie V akumulovaná v pružině

$$V = \frac{1}{2} (k \Delta u^2)$$

2 Lineárně viskozní tlumič c



Vztah mezi silou a rychlostí prodloužení pružiny

$$f_d = c(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = c \Delta \dot{u}$$

c je koeficient viskozního tlumení [N.s.m⁻¹]

3 Soustředěná hmotnost m [kg] pro translaci hmotného tělesa

Hmotný moment setrvačnosti I_m [kg.m²] pro rotaci hmotného tělesa

Reálně

blokový základ se strojem na pružném podkladu, vodojem,

POHYBOVÁ ROVNICE

diskrétního modelu s jedním stupněm volnosti (SV)

Pro uvedený model soustředěná hmota může konat

Pouze 1 (translační) pohyb – 1 SV

Cíl – zapsat (sestavit) pohybovou rovnici popisující pohyb části tělesa (hmotného tělesa) přiřazenému k bodu

Popis je vázán na jedinou výchylku $u(t)$

Vychází se z 2. Newtonova zákona

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \longrightarrow \text{Pohybová rovnice}$$

$\mathbf{F}$ je síla působící na soustavu (M moment)

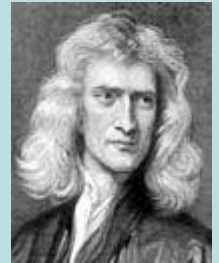
m je soustředěná hmotnost (I_G hmotný moment setrvačnosti)

$\mathbf{a}$ je zrychlení v referenční inerciální soustavě (ε úhlové zrychlení)

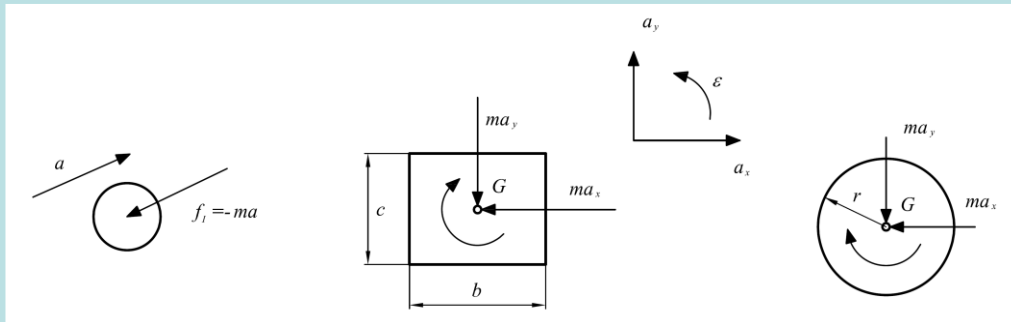
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica
(Matematické základy přírodní filosofie) 1687



Isaac Newton



Sir Isaac Newton
4. 1. 1643 31. 3. 1727



Kinetická energie

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

$$T = \frac{1}{2}m(v_{Gx}^2 + v_{Gy}^2) + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

$$M_I = -I_G\varepsilon = -\frac{m}{12}(b^2 + c^2)\varepsilon \quad M_I = -I_G\varepsilon = -\frac{1}{2}(mr^2)\varepsilon$$

Lze použít jiný postup zápisu

Zavedme d'Alembertovy síly – setrvačné síly $\mathbf{f}_I = -m\mathbf{a}$

$$\sum \mathbf{F}' = \mathbf{f}_I + \sum \mathbf{F} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Rovnice dynamické rovnováhy}$$

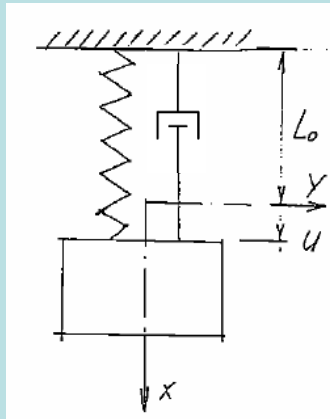
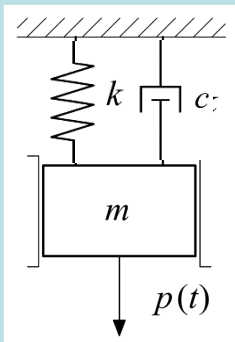
Sestavení pohybové rovnice (diskrétní soustava) – buzení silami

Využití 2. Newtonova zákona

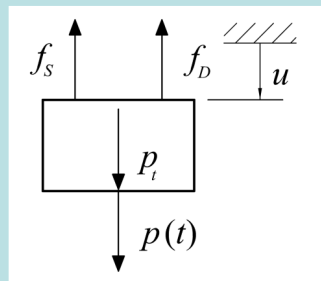
Předpoklady

Pouze svislý pohyb, nehmotná pružina a tlumič, odpor vzduchu zanedbán,

Postup



Silový diagram



$$+\downarrow \sum F_x = m\ddot{u}$$

$$p - f_s - f_D + p_t = m\ddot{u}$$

$$f_s = k(u - 0) = ku$$

$$f_D = c(\dot{u} - 0) = c\dot{u}$$

p_t vlastní tíha

$p(t)$ vnější síla

Pohybová rovnice zapsaná v závislosti na **absolutní** souřadnici $u(t)$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_t + p(t)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_t + p(t)$$

Nehomogenní obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty!

Dále

$$u_{st} = \frac{p_t}{k} \quad \text{statická výchylka}$$

u_r je posunutí tělesa (závaží) vůči statické rovnovážné poloze u_{st}

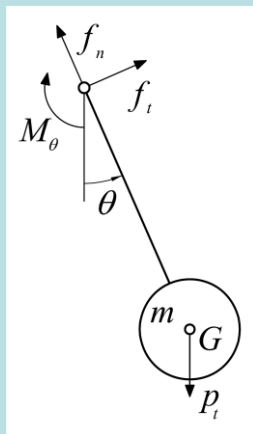
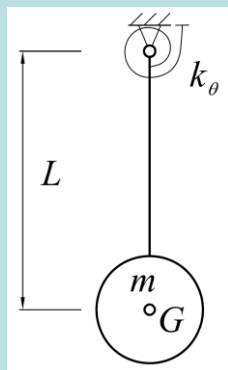
Celkové posunutí $u = u_r + u_{st}$

Po dosazení u do pohybové rovnice a úpravách

$$m\ddot{u}_r + c\dot{u}_r + ku_r = p(t)$$

Pohybová rovnice zapsaná v závislosti na **relativní** souřadnici $u_r(t)$

Odvození pohybové rovnice kyvadla



Podle 2. Newtonova zákona

$$\sum M_0 = I_0 \ddot{\theta}$$

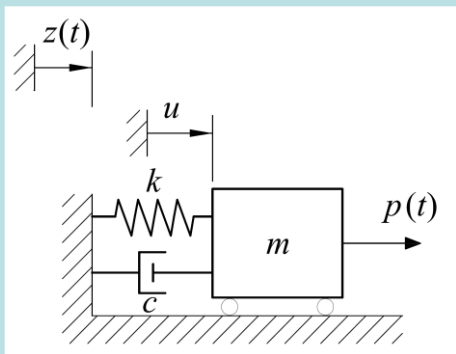
$$-M_\theta - p_t L \sin \theta = I_0 \ddot{\theta}, \text{ kde } M_\theta = k_\theta \theta$$

a $I_0 = I_G + mL^2$ je hmotný moment setrvačnosti

Pohybová rovnice zapsaná v závislosti na relativní souřadnici $\theta(t)$

$$(I_G + mL^2)\ddot{\theta} + k_\theta \theta = p_t L \sin \theta$$

Sestavení pohybové rovnice (diskrétní soustava) – buzení silou a pohybem základu - využije se d'Alembertův postup



Předpoklady:

Vychází se ze stejných jako v předchozím příkladu +

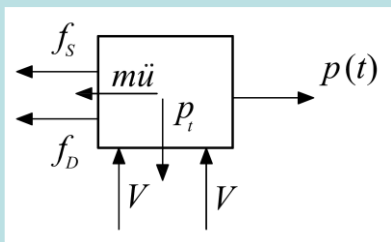
Těleso se beze tření může pohybovat pouze ve směru výchylky u .

Na počátku děje je pružina nenapjatá, tedy $u = z = 0$.

Funkce pohybu základu $z(t)$ je známa.

Postup

Silový diagram a d'Alembertův princip $\rightarrow \sum F'_x = 0 \quad p(t) - f_s - f_D - m\ddot{u} = 0$



Po rozepsání sil

$$m\ddot{u} + \underbrace{c(\dot{u} - \dot{z})}_{f_D} + \underbrace{k(u - z)}_{f_s} = p(t)$$

Pohybová rovnice zapsaná v závislosti na **absolutní souřadnici** $u(t)$ vzhledem k inerciální referenční soustavě

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{z} + kz + p(t)$$

Častěji uvedená rovnice přepisuje v **relativní souřadnici** $u_r(t) = u - z$

Po dosazení za $u = u_r + z$

$$m\ddot{u}_r + c\dot{u}_r + ku_r = p(t) - m\ddot{z}$$

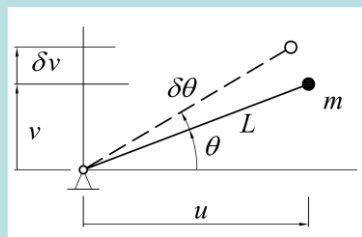
Pohyb základu se projevuje přidáním reverzích setrvačných sil $p_{eff}(t) = -m\ddot{z}$

Aplikace principu virtuálních přemístění k diskrétnímu modelu s jedním stupněm volnosti

Základní pojmy

- a) **Souřadnice** (přemístění) je hodnota používaná pro určení změny konfigurace systému
- b) **Omezení** (vazba) je kinematické omezení (vazba) v systému
- c) **Virtuální přemístění** jsou infinitesimální imaginární (smyšlené) změny konfigurace systému, které jsou konzistentní s omezeními (vazbami)

Příklad Proměnná posunutí (souřadnice) u a v jsou závislé (nehmotná abs. tuhá tyč) lze je vyjádřit pomocí jedné proměnné úhlu θ



$$u = L \cos \theta \quad \text{a} \quad v = L \sin \theta$$

Omezující rovnice

$$u^2 + v^2 = L^2$$

$$v + \delta v = L \sin(\theta + \delta \theta) = L(\sin \theta \cos \delta \theta + \sin \delta \theta \cos \theta)$$

Virtuální změna $\delta \theta$ je *infinitesimální*

$$\cos \delta \theta \cong 1 \quad \text{a} \quad \sin \delta \theta \cong \delta \theta \quad \text{potom} \quad v + \delta v = L \sin \theta + L \cos(\theta) \delta \theta$$

Virtuální změna $\delta v = L \cos(\theta) \delta \theta$

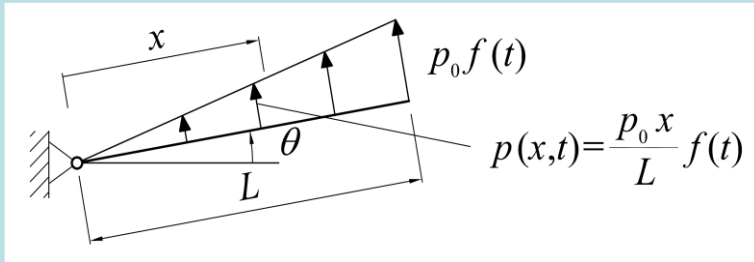
du, dv jsou diferenciály
uvedených funkcí

Obdobně virtuální změna $\delta u = -L \sin(\theta) \delta \theta$

- d) **Množina zobecněných** (generalizovaných) **souřadnic** je množina lineárně nezávislých souřadnic přemístění, které jsou konzistentní s omezeními a popisují libovolnou konfiguraci systému; označují se q_i ($i = 1, \dots, N$) n -stupňové soustavy.

e) **Virtuální práce** dW je práce sil na virtuálních přemístěních $\delta W = \sum_{i=1}^N Q_i \delta q_i$
 kde Q_i jsou zobecněné (generalizované) síly

Příklad: Určete virtuální práci sil působících na tuhý nosník

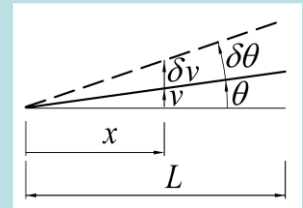


$$\delta W = \int_0^L p(x,t) \delta v(x,t) dx$$

$\swarrow$ $p(x,t) = p_0 \frac{x}{L} f(t)$ $\searrow$ $\delta v = x \delta \theta$

$$\delta W = \int_0^L \left(\frac{p_0 x f(t)}{L} \right) (x \delta \theta) dx = \left(\frac{p_0 L f(t)}{2} \right) \left(\frac{2L \delta \theta}{3} \right) = \frac{p_0 f(t) L^2}{3} \delta \theta$$

Zobecněná síla (moment) Q_θ



(f) **Princip virtuálních přemístění** - obdobně jako ve statice, s tím rozdílem, že je nutno uvažovat setrvačné síly

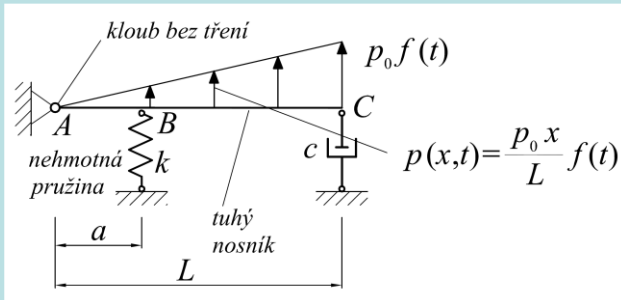
Princip virtuálních přemístění lze zapsat ve tvaru

$$\delta W' = \delta W_{rf} + \delta W_{if} = 0$$

Pro libovolné virtuální přemístění systému virtuální práce „skutečných“ sil a setrvačných sil je rovna nule

Příklad:

Sestavte pohybovou rovnici soustavy 1SV s využitím principu virtuálních přemístění

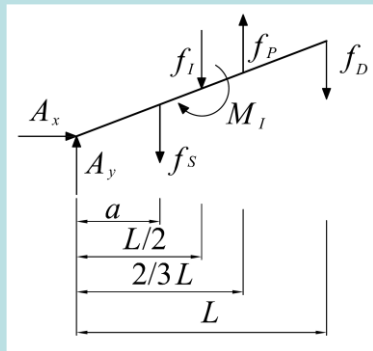


Jediná proměnná θ

$$\delta W' = 0$$

Virtuální změna v místech reakcí je rovna nule, podmínka konzistence

Reakce A_x a A_y se v rovnici neuplatní.



$$\delta W' = -f_s(a\delta\theta) - f_I\left(\frac{L}{2}\delta\theta\right) - M_I(\delta\theta) + f_P\left(\frac{2}{3}L\delta\theta\right) - f_D(L\delta\theta) = 0$$

Dále

$$f_s = ka\theta \quad f_I = \left(\frac{mL}{2}\right)\ddot{\theta} \quad M_I = \left(\frac{mL^2}{12}\right)\ddot{\theta} \quad f_P = \left(\frac{p_0 L}{2}\right)f(t) \quad f_D = cL\dot{\theta}$$

$$\left[\left(\frac{mL^2}{3}\right)\ddot{\theta} + (cL^2)\dot{\theta} + (ka^2)\theta - \frac{p_0 L^2 f(t)}{3}\right]\delta\theta = 0, \text{ kde } \delta\theta \neq 0$$

Výraz v hranaté závorce musí být roven nule. Lze zapsat

$$\left(\frac{mL^2}{3}\right)\ddot{\theta} + (cL^2)\dot{\theta} + (ka^2)\theta = \left(\frac{p_0 L^2}{3}\right)f(t)$$

Pohybová rovnice

Princip virtuálních přemístění



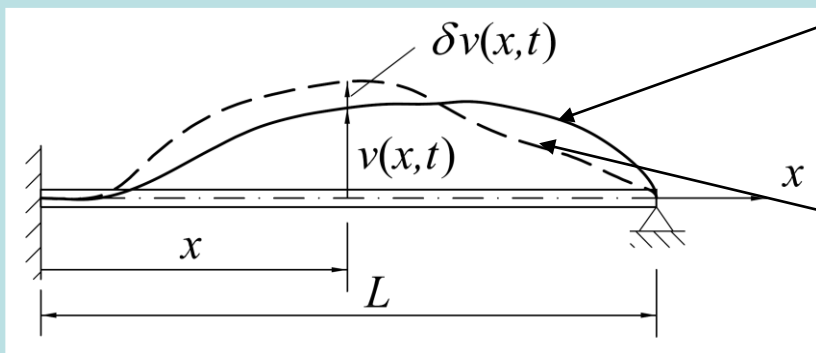
$$[F(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)]\delta q = 0$$

Aplikace principu virtuálních přemístění ke spojitým modelům

V předchozí části byl aplikován princip virtuálních prací na tuhé těleso v rovině. Ve skutečnosti nosník je poddajný spojitý model a popis poddajnosti je možný zavedením vybraných funkcí aproximujících chování nosníku. V tomto případě hovoříme o sestavení zobecněného parametrického modelu spojitého systému.

Definujeme další pojmy:

- a) **Spojitý (kontinuální) systém** je takový systém, jehož deformace je popsána jednou nebo více funkcemi jedné, dvou, tří prostorových souřadnic a času
- b) **Geometrické okrajové podmínky** jsou kinematická omezení (posunutí, pootočení) na části hranice tělesa (modelu)
- c) **Virtuální přemístění spojitého systému** je infinitesimální imaginární změna konfigurace systému popsaná funkcemi přemístění a je konzistentní se všemi geometrickými okrajovými podmínkami



Funkce průhybu $v(x, t)$.

- omezující podmínky

$$v(0, t) = v'(0, t) = v(L, t) = 0$$

Funkce virtuálního průhybu $\delta v(x, t)$.

- omezující podmínky

$$\delta v(0, t) = \delta v'(0, t) = \delta v(L, t) = 0$$

d) **Přípustná funkce** která vyhovuje geometrickým okrajovým podmínkám systému
Funkce musí mít derivace nejméně do řádu vyskytujícího se ve výrazu pro energii deformace systému

e) **Tvarová (aproximační) funkce** je přípustná funkce pro aproximaci deformací spojitého systému.

$$v(x, t) = \psi(x)\underline{v}(t)$$

f) **Princip virtuálních přemístění** $\delta W' = \delta W_{rf} + \delta W_{if} = 0$ v případě spojitě (kontinuální) **poddajné soustavy** je doplněn o člen zahrnující virtuální změnu potenciální energie deformace δV , neboli jinak virtuální práci konservativních sil dW_c

$$\delta W_{rf} = \delta W_c + \delta W_{nc}, \quad \text{kde} \quad -\delta V = \delta W_c$$

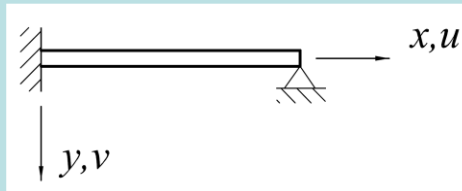
Potom

$$\delta W' = \delta W_{nc} - \delta V + \delta W_{if} = 0$$

- Princip virtuálních přemístění

$$V_{osov} = \frac{1}{2} \int_0^L AE (u')^2 dx$$

$$\delta V_{osov} = \int_0^L (AE u') \delta u' dx$$



$$V_{ohyb} = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx$$

$$\delta V_{ohyb} = \int_0^L (EI v'') \delta v'' dx$$

d) **Připustná funkce** která vyhovuje geometrickým okrajovým podmínkám systému
Funkce musí mít derivace nejméně do řádu vyskytujícího se ve výrazu pro energii deformace systému

e) **Tvarová (aproximační) funkce** je připustná funkce pro aproximaci deformací spojitého systému.

$$v(x, t) = \psi(x) \underline{v}(t)$$

f) **Princip virtuálních přemístění** $\delta W' = dW_{rf} + dW_{if} = 0$ v případě spojitě (kontinuální) **poddajné soustavy** je doplněn o člen zahrnující virtuální změnu potenciální energie deformace δV , neboli jinak virtuální práci konservativních sil dW_c

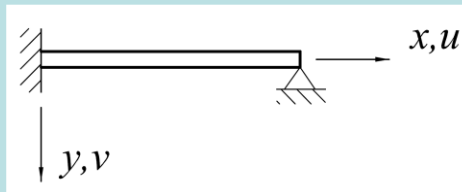
$$\delta W_{rf} = \delta W_c + \delta W_{nc}, \quad \text{kde} \quad -\delta V = \delta W_c$$

Potom

$$\delta W' = \delta W_{nc} - \delta V + \delta W_{if} = 0$$

- Princip virtuálních přemístění

$$V_{osov} = \frac{1}{2} \int_0^L AE (u')^2 dx$$



$$V_{ohyb} = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx$$

$$\delta V_{osov} = \int_0^L (AE u') \delta u' dx$$

$$\delta V_{ohyb} = \int_0^L (EI v'') \delta v'' dx$$

Elementární příklad

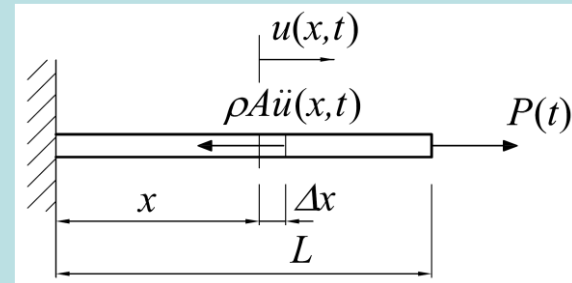
Sestavte pohybovou rovnici pro pohyb nosníku v podélném směru

Předpoklady:

Lineárně pružný nosník konstantního průřezu A

Materiálové vlastnosti E a ρ konstanty

Okrajové podmínky: $u(0, t) = 0, y(0) = 0$



Výběr tvarové (přípustné funkce): $u(x, t) = \psi \underline{u}(t)$ $\psi(x) = \frac{x}{L}$

$$u(x, t) = \frac{x}{L} \underline{u}(t) \quad \delta u(x, t) = \frac{x}{L} \delta \underline{u}(t) \quad u' = \varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

Princip virtuálních posunutí $\delta W' = \delta W_{nc} - \delta V + \delta W_{If} = 0$ $\delta \underline{u} \neq 0$

Virtuální práce (nekonzervativních vnějších sil)

$$\delta W_{nc} = P(t) \delta u(L, t) = P(t) \frac{L}{L} \delta \underline{u} = P(t) \delta \underline{u}$$

Virtuální změna potenciální energie deformace dV

$$\delta V = \int_0^L (AE u') \delta u' dx = AE \int_0^L \left(\frac{u}{L} \right) \left(\frac{\delta \underline{u}}{L} \right) dx = \left(\frac{AE \underline{u}}{L} \right) \delta \underline{u}$$

Virtuální práce setrvačných sil

$$\delta W_{If} = \int_0^L (-\rho A \ddot{u}) \delta u dx = - \left(\frac{\rho A \ddot{\underline{u}}}{L^2} \right) \int_0^L x^2 dx = - \left(\frac{\rho AL}{3} \right) \ddot{\underline{u}} \delta \underline{u}$$

$$\left[P(t) - \left(\frac{AE}{L} \right) \underline{u} - \left(\frac{\rho AL}{3} \right) \ddot{\underline{u}} \right] \delta \underline{u} = 0$$

Pohybová rovnice

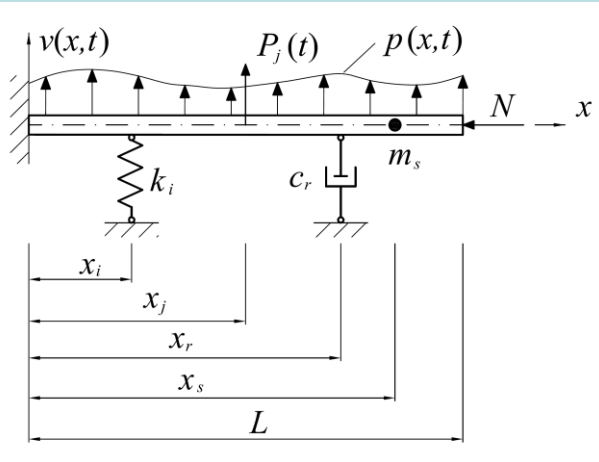
$$m \ddot{u} + ku = p(t), \quad u_0, \dot{u}_0$$

$$\left(\frac{\rho AL}{3} \right) \ddot{\underline{u}} + \left(\frac{AE}{L} \right) \underline{u} = P(t)$$

Vyčíslí se $\underline{u}(t)$ a dosadí do

$$u(x, t) = \frac{x}{L} \underline{u}(t)$$

Zobecnění



$$\delta W_d = -c_r \dot{v}(x_r, t) \delta v(x_r, t)$$

$$\delta W_d = -c \psi(x_r)^2 \underline{\dot{v}} \delta \underline{v}$$

$$\delta W_d = -\underline{c} \underline{\dot{v}} \delta \underline{v}$$

$$\underline{c} = -c_r \psi_r^2$$

Zobecněný
koeficient útlumu

$$\delta W_p = \int_0^L p(x, t) \delta v(x, t) dx + P_j \delta v(x_i, t)$$

$$\delta W_p = \underline{p}(t) \delta \underline{v}$$

$$\underline{p}(t) = \int_0^L p(x, t) \psi(x) dx + P_j(t) \psi_i$$

Zobecněná
vnější síla

Hledají se koeficienty rovnice

kde v je funkce průhybu

$$v(x, t) = \psi(x) \underline{v}(t)$$

$$\delta W' = \delta W_{nc} - \delta V + \delta W_i = 0$$

$$\delta W_{If} = \int_0^L (-\rho A \ddot{v}) \delta v dx - m_s \ddot{v}(x_s t) \delta v(x_s t)$$

$$\delta W_{If} = - \left[\int_0^L \rho A \psi(x)^2 dx + m_s \psi(x_s)^2 \right] \underline{\ddot{v}} \delta \underline{v}$$

$$\delta W_{If} = -\underline{m} \underline{\ddot{v}} \delta \underline{v}$$

$$\underline{m} = \int_0^L \rho A \psi^2(x) dx + m_s \psi_s^2$$

Zobecněný
Koeficient
hmotnosti

$$\delta V_b = \int_0^L EI v'' \delta v'' dx \quad \delta V_b = \left[\int_0^L EI (\psi'')^2 dx \right] \underline{v} \delta \underline{v}$$

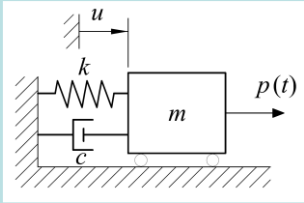
$$\delta V_s = k_i v_i \delta v_i = k_i v(x_i, t) \delta v(x_i, t) \quad \delta V_s = k_i \psi_i^2 \underline{v} \delta \underline{v}$$

$$\delta V_s + \delta V_b = \underline{k} \underline{v} \delta \underline{v}$$

$$\underline{k} = \int_0^L EI [\psi''(x)]^2 dx + k_i \psi_i^2$$

Zobecněný
koeficient
tuhosti

VOLNÉ (VLASTNÍ) KMITÁNÍ SOUSTAVY S 1SV



Soustředěná hmota může konat jediný přímočarý nebo otáčivý pohyb
Pohyb je popisován funkcí (výchyly) posunutí $u(t)$

Pohybová rovnice $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$

s počátečními podmínkami $u(0) = u_0$ a $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

Cílem je určit odezvu na působení budicí síly $p(t)$ při zadaných počátečních podmínkách v čase $t = 0$

Je-li na počátku soustava v klidu $u(0) = 0$ a $\dot{u}(0) = 0$

Pohybovou rovnici upravíme na tvar ($:m$)

$$* \quad \ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right)p(t), \text{ kde } \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{nebo} \quad \left(\frac{1}{m} = \frac{\omega_n^2}{k}\right)$$

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}}, \text{ kde } c_{cr} = 2m\omega_n = \frac{2k}{\omega_n} = 2\sqrt{km}$$

ω_n - netlumená vlastní úhlová frekvence [$\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$]

ζ - parametr viskózního tlumení (poměrný útlum) [—]

c_{cr} - koeficient kritického tlumení [$\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$]

Rovnice je lineární obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

Řešení této rovnice, neboli jinak celková odezva $u(t)$, sestává ze dvou částí

$$u(t) = u_p(t) + u_c(t),$$

část $u_p(t)$ odpovídá působení síly $p(t)$ - potom se mluví o vynuceném kmitání
část řešení $u_c(t)$ odpovídá volnému (vlastnímu) kmitání

Z matematického hlediska **celkové řešení** diferenciální rovnice sestává

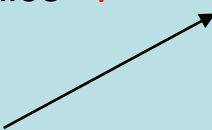
- a) z **obecného řešení** $u_c(t)$
- b) z **partikulárního řešení** $u_p(t)$

Volné (vlastní) kmitání – $p(t) = 0$

Z rovnice * $\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$

Řešení rovnice $u = \bar{C}e^{\bar{s}t}$

$(\bar{s}^2 + 2\zeta\omega_n\bar{s} - \omega_n^2) \bar{C}e^{\bar{s}t} = 0$



Pro všechny hodnoty t platí **charakteristická rovnice** $\bar{s}^2 + 2\zeta\omega_n\bar{s} + \omega_n^2 = 0$

Volné kmitání netlumené soustavy $\zeta = 0$ s 1SV

$$\bar{s}^2 + 2\zeta\omega_n\bar{s} + \omega_n^2 = 0$$

charakteristická rovnice

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0 \longrightarrow \bar{s}^2 + \omega_n^2 = 0$$

kořeny rovnice $\bar{s}_{1,2} = \pm i\omega_n$

Řešení v komplexních číslech $u = \bar{C}_1 e^{i\omega_n t} + \bar{C}_2 e^{-i\omega_n t}$

S využitím Eulerovy rovnice $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$

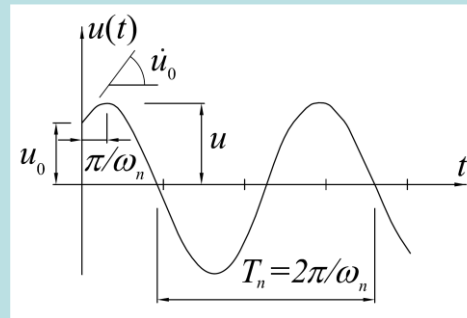
Řešení vyjádřeno pomocí trigonometrických funkcí $u = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t$

A_1, A_2 - integrační konstanty – se získají z počátečních podmínek

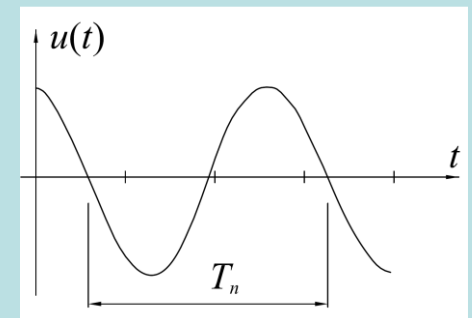
$$u(0) = u_0 = A_1 \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 = A_2 \omega_n$$

$$u = u_0 \cos\omega_n t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right) \sin\omega_n t$$

jednoduchá harmonická
funkce kmitání



$$u(0) = u_0 \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0$$

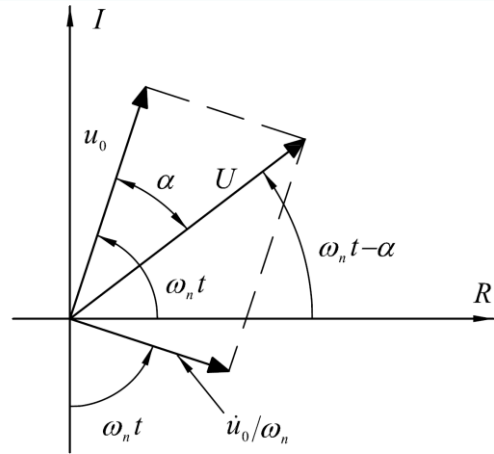


$$u(0) = u_0 \quad \dot{u}(0) = 0$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad - \text{perioda netlumené soustavy [s]}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad - \text{netlumená vlastní frekvence (kmitočety) [Hz]}$$

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\omega_n}$$



$$u = u_0 \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \right) \sin \omega_n t$$

$$\text{nebo } u(t) = U \cos(\omega_n t - \alpha) = U \cos \omega_n \left(t - \frac{\alpha}{\omega_n} \right),$$

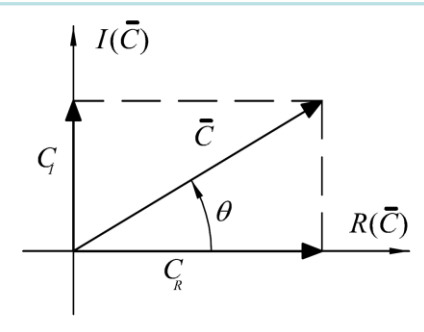
$$\text{kde } U^2 = u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \right)^2 \text{ a } \tan \alpha = \frac{\dot{u}_0}{\omega_n u_0}$$

Rotující vektor

$$\bar{C} = C e^{i\theta}$$

$$\bar{C} = R(\bar{C}) + iI(\bar{C}) = C_R + C_I$$

$$C_R = C \cos \theta \quad C_I = C \sin \theta$$



Závěry

- Vlastní úhlová frekvence ω_n je závislá pouze na tuhosti soustavy k a hmotnosti soustavy m
- Veličiny ω_n , f_n a T_n nejsou závislé na amplitudě kmitání - kmitání netlumené soustavy je **pohyb izochronní**, neboť se jedná o harmonické kmitání stejné frekvence
- Frekvence f_n je na změnu parametrů k a m málo citlivá** vzhledem k odmocnině ve výrazu
- Je-li nutno soustavu frekvenčně přeladit, lze to realizovat změnou tuhosti a hmotnosti soustavy
- Měnit hmotnost m soustavy je prakticky těžko proveditelné, tedy **přeladění soustavy se zpravidla realizuje změnou tuhosti k**

Volné kmitání viskózně tlumené soustavy s 1SV

Kmitání soustavy s viskózním tlumením $\zeta \neq 0$

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

Pohybové rovnici odpovídá charakteristická rovnice

$$\bar{s}^2 + 2\zeta\omega_n\bar{s} + \omega_n^2 = 0$$

$$\bar{s}_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Podle možných kořenů dostáváme řešení vlastního kmitání

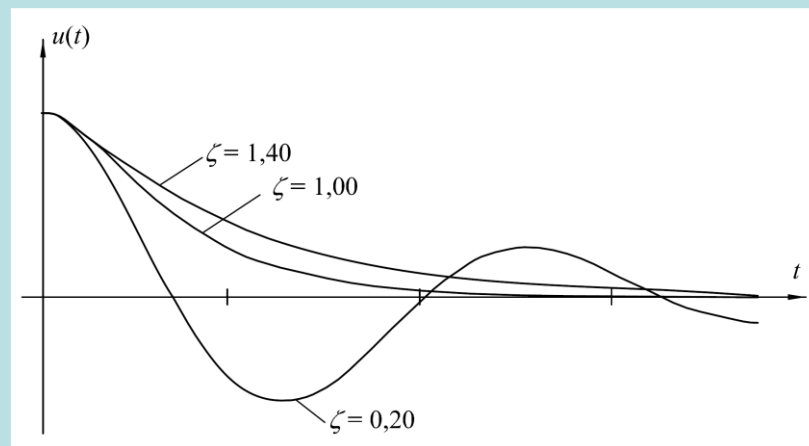
Parametr, který významně ovlivňuje způsob pohybu tlumené jednostupňové soustavy je **poměrný útlum** ζ

V závislosti na velikosti tohoto parametru rozlišujeme **tři případy**:

1. Tlumení je malé $0 < \zeta < 1$ - podkritický útlum

2. Poměrný útlum $\zeta = 1$ - kritický útlum

3. Poměrný útlum $\zeta > 1$ - nadkritický útlum



1. Podkritický útlum $\zeta < 1$

$$\bar{s}_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\bar{s}_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \quad \text{Dva kořeny}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

- tlumená vlastní úhlová frekvence [rad·s⁻¹]

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}$$

- tlumená vlastní frekvence (kmitočet) [Hz]

$$T_d = \frac{1}{f_d} = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

- perioda tlumené soustavy [s]

z počát. podmínek

Pohyb

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t)$$

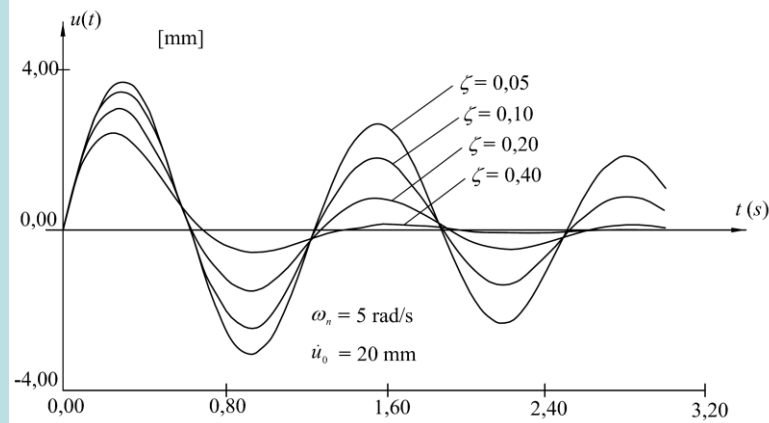
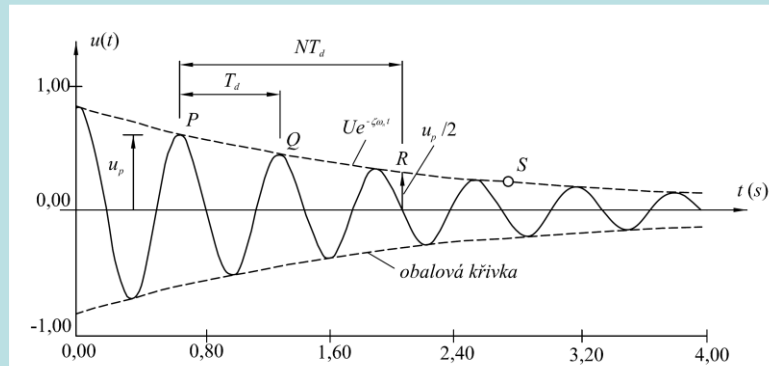
$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u_0\cos\omega_d t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)\sin\omega_d t\right]$$

nebo

$$u(t) = Ue^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \alpha)$$

$$U^2 = u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)^2$$

$$\tan\alpha = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_n u_0}$$



Soustředěná hmota viskózně tlumené soustavy koná harmonický pohyb

Amplituda klesá podle exponenciální funkce, v čase $t = \infty$, je rovna nule, prakticky při 1/20

Časový průběh výchylky většinou dobře souhlasí se skutečnou

Frekvence kmitavého pohybu $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ se nemění
V praktických případech rozdíl ve frekvencích je tak malý, že jej často zanedbáváme

2. Kritický útlum $\zeta = 1$ $\bar{s}_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

$\bar{s} = -\zeta\omega_n$ Jeden kořen

$$u(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\zeta\omega_n t}$$

$$u(t) = [u_0 + (\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0)t]e^{-\zeta\omega_n t}$$

Nedochází k oscilacím!

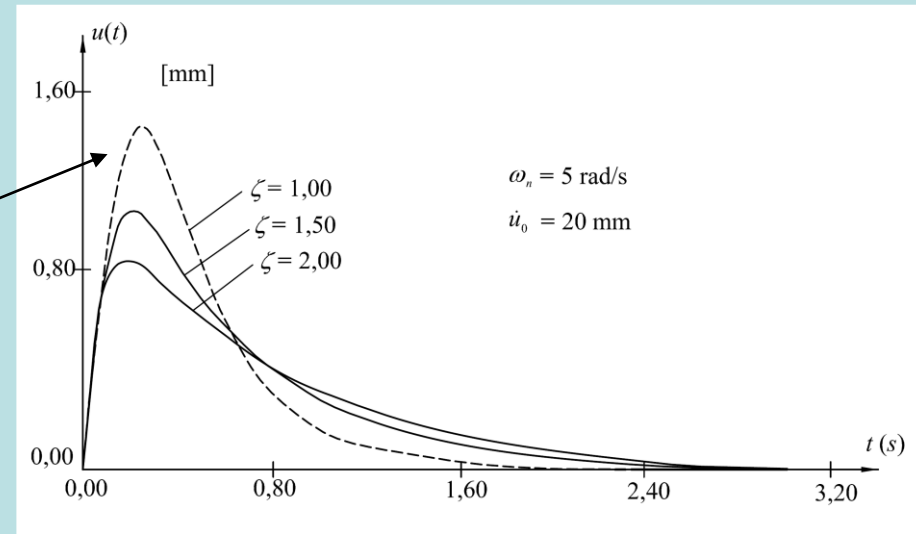
3. Nadkritický útlum $\zeta > 1$

Dva záporné kořeny

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(C_1 \cosh \hat{\omega} t + C_2 \sinh \hat{\omega} t)$$

$$\hat{\omega} = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Nedochází k oscilacím!



C_1 a C_2 se určí opět z počátečních podmínek

Tlumení stavebních konstrukcí malé poměrný útlum ζ (0,003 ÷ 0,2)

Určování tlumicích parametrů

Metoda logaritmického dekrementu útlumu a další postupy

Metoda logaritmického dekrementu útlumu

Na počátku cyklu $u_i = u(t_i)$

Na konci cyklu $u_{i+1} = u(t_i + T_d)$

Jejich poměr
$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{Ue^{-\zeta\omega_n t_i}}{Ue^{-\zeta\omega_n(t_i+T_d)}} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_i}}{e^{-\zeta\omega_n(t_i+T_d)}} = e^{\zeta\omega_n T_d}$$

Logaritmický dekrement δ útlumu

je bezrozměrné číslo, kterým se vyjadřuje intenzita viskózního tlumení, neboť nezávisí na rychlosti kmitání

$$\delta = \ln\left(\frac{u_i}{u_{i+1}}\right) = \zeta\omega_n T_d \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

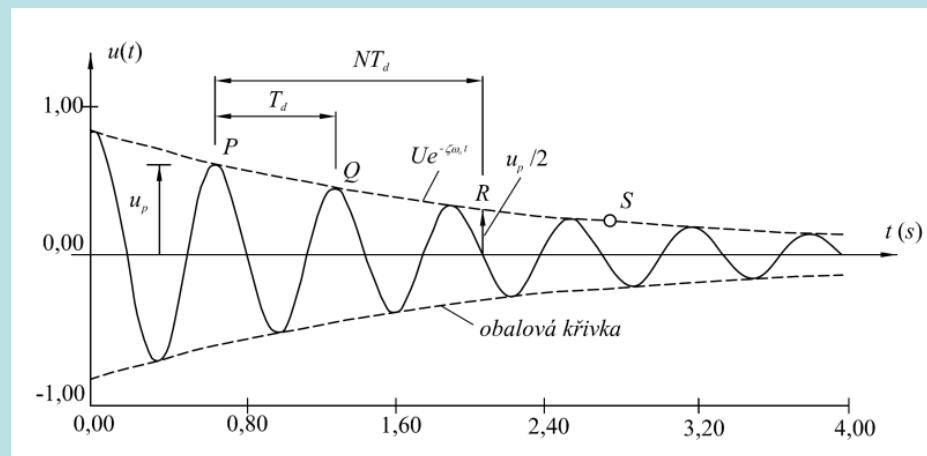
$$\delta = \zeta\omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Vztah mezi logaritmickým dekrementem útlumu a parametrem tlumení ζ (poměrným útlumem).

$$\delta \doteq 2\pi\zeta \Rightarrow \zeta \doteq \frac{\delta}{2\pi} \quad \zeta \doteq \left(\frac{1}{2\pi}\right) \ln\left(\frac{u_i}{u_{i+1}}\right)$$

Při experimentálním zjišťování útlumu se bere v čase poměr výchylek od sebe vzdálených o k celých cyklů, potom přijdeme k důležitému vzorci

$$\ln\left(\frac{u_i}{u_{i+k}}\right) = \ln\left(\frac{u(t_i)}{u(t_i + kT_d)}\right) = k\zeta\omega_n T_d = k\delta$$



Volné (vlastní) kmitání soustavy s 1SV s útlumem vyvolaným smykovým třením

Na pohybující se část modelu působí třecí síla f_D směřující proti pohybu

$$f_D = \mu_k N = \mu_k mg$$

Pohybová rovnice

$$-f_S - f_D = m\ddot{u}$$

$$m\ddot{u} + ku = -\mu_k mg, \quad \text{pro } \dot{u} > 0$$

$$m\ddot{u} + ku = +\mu_k mg, \quad \text{pro } \dot{u} < 0$$

Nechť

$$u_D = |f_D| \left(\frac{1}{k} \right) = \frac{\mu_k g}{\omega_n^2}$$

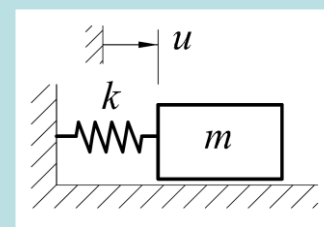
potom

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = +\omega_n^2 u_0, \quad \text{pro } \dot{u} > 0$$

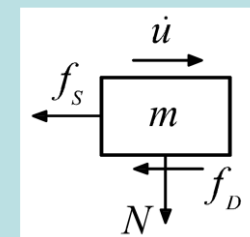
$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = -\omega_n^2 u_0, \quad \text{pro } \dot{u} < 0$$

Po zavedení substituce $\hat{u}(t) = u(t) + u_0$

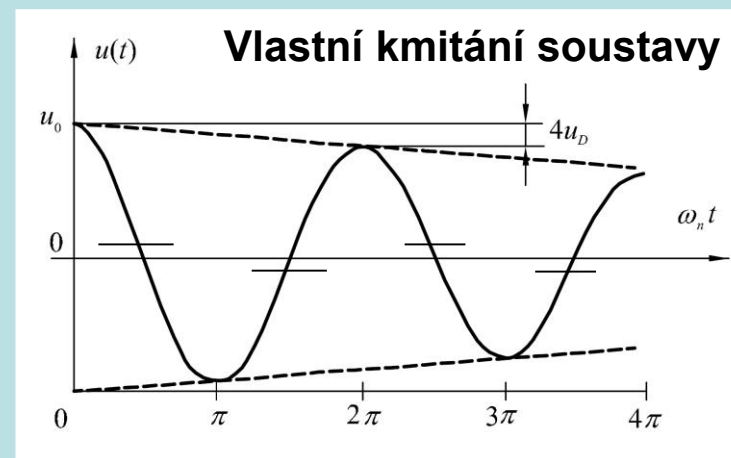
$$\ddot{\hat{u}} + \omega_n^2 \hat{u} = 0$$



model



silový diagram



Průběh pohybu při suchém tření

Mezi jednotlivými krajními polohami vzdálenými o půl periody je pohyb harmonický se skokově posunutým středem

Charakteristickým rysem tohoto pohybu je lineárně klesající amplituda

ODEZVA SOUSTAVY S 1 SV NA HARMONICKÉ BUZENÍ

- zatížení je možné popsat pomocí harmonické funkce (sin, cos)

nevývažky točivých strojů,
obtékání konstrukce proudem tekutiny (kapalina, plyn),
synchronním pohybem osob po mostní konstrukci a pod.

Odezva netlumené soustavy s 1 SV na harmonické buzení

Funkce buzení $p(t) = p_0 \cos \Omega t$

p_0 - amplituda budicí síly

Ω - úhlová frekvence budicí síly (získá se z otáček za minutu)

Pohybová rovnice $m\ddot{u} + ku = p_0 \cos \Omega t$ *

Řešení pohybové rovnice

Řešení se skládá z vlastního kmitání u_c a z vynuceného kmitání u_p

- **vynucené kmitání** (u harmonického buzení **ustálená odezva**)

$u_p = U \cos \Omega t$ $\ddot{u}_p = -U\Omega^2 \cos \Omega t$ po dosazení do * zjistíme, že

$$U = \frac{p_0}{k - m\Omega^2}$$

za podmínky $(k - m\Omega^2) \neq 0$

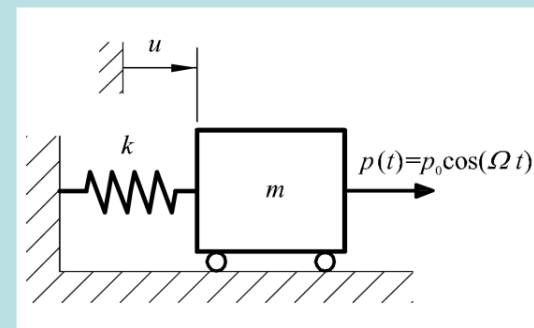
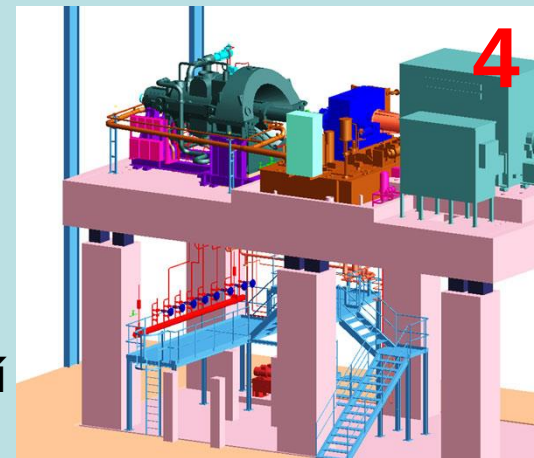
Nechť $U_0 = \frac{p_0}{k}$ je statická výchylka

Funkce frekvenční odezvy $H(\Omega) = \frac{U}{U_0}$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - r^2}$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

- frekvenční poměr
 $r \neq 1$



$$D_s = |H(\Omega)|$$

faktor zesílení při ustálené odezvě - **dynamický součinitel**

Pro $r < 1$ $u_p = \left(\frac{U_0}{1 - r^2} \right) \cos \Omega t$

- podrezonanční kmitání

odezva u_p je ve fázi s buzením $p(t)$

$$(1 - r^2) > 0$$

Pro $r > 1$ $u_p = \frac{U_0}{(r^2 - 1)} (-\cos \Omega t)$

- nadrezonanční kmitání

odezva u_p je v protifázi (180°) s buzením $p(t)$

$$(1 - r^2) < 0$$

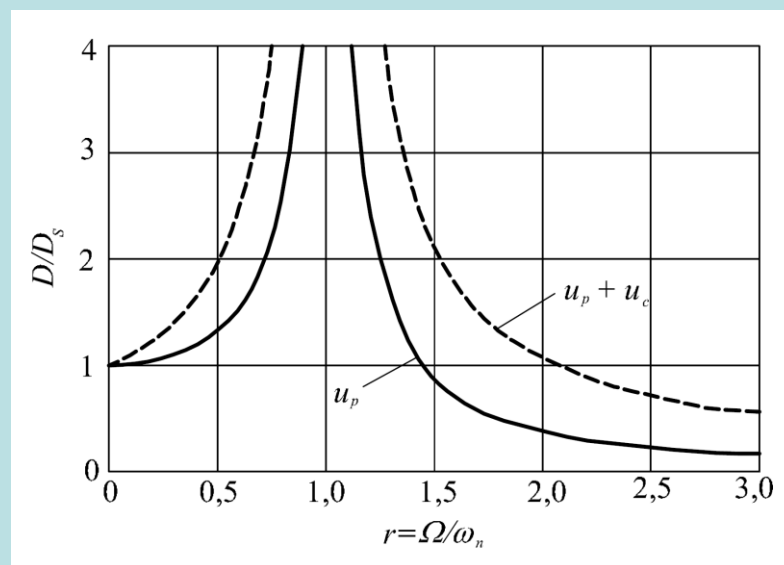
$$u(t) = u_p(t) + u_c(t) = \left(\frac{U_0}{1 - r^2} \right) \cos \Omega t + A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

$$\dot{u} = \frac{-U_0 \Omega}{1 - r^2} \sin \Omega t - A_1 \omega_n \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t$$

$$\ddot{u} = \frac{-U_0 \Omega^2}{1 - r^2} \cos \Omega t - A_1 \omega_n^2 \cos \omega_n t - A_2 \omega_n^2 \sin \omega_n t$$

Konstanty A_1 a A_2 možné vyčíslit
z počátečních podmínek

$$u_0 = u(t = 0) \quad \text{a} \quad \dot{u}_0 = \dot{u}(t = 0)$$



Příklad

Vyčíslete odezvu na buzení harmonickou silou

Budicí síla

$$p(t) = 10 \cos(10t)$$

p_0

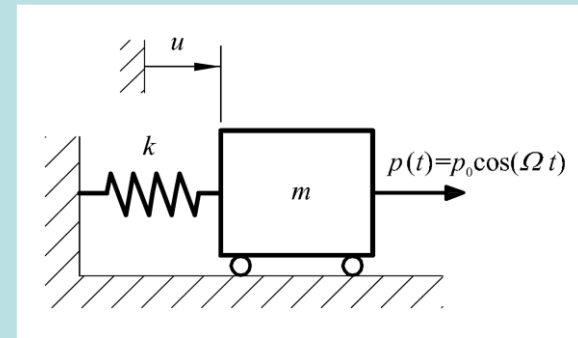
Ω

$$k = 4000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$m = 10 \text{ kg}$$

Počáteční podmínky

$$u_0 = \dot{u}_0 = 0$$



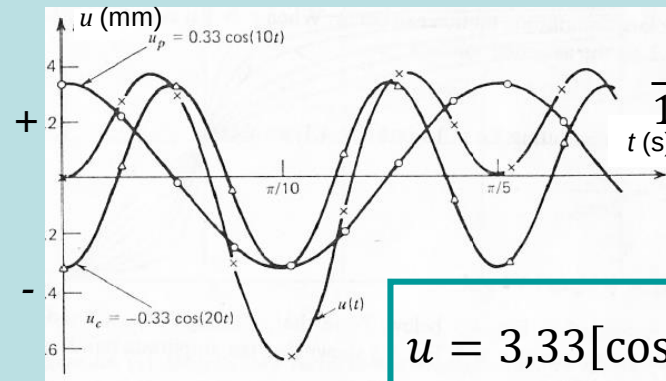
Řešení

Výpočet konstant A_1 a A_2

$$u = \frac{U_0}{1-r^2} \cos \Omega t + A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \rightarrow u(0) = 0 = \frac{U_0}{1-r^2} + A_1 \quad A_1 = -\frac{U_0}{1-r^2}$$

$$\dot{u} = \frac{-U_0 \Omega}{1-r^2} \sin \Omega t - A_1 \omega_n \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t \rightarrow \dot{u}(0) = 0 = A_2 \omega_n$$

$$u = \frac{U_0}{1-r^2} \cos \Omega t + \frac{U_0}{1-r^2} \cos \omega_n t$$



$$\begin{aligned} \frac{U_0}{1-r^2} &= \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{1-(0,5)^2} = \\ &= 3,333 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ &= 3,333 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$u = 3,33[\cos(10t) - \cos(20t)]$$

Číselně

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4000}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$U_0 = \frac{p_0}{k} = \frac{10}{4000} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,5 \text{ mm}$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{10}{20} = 0,5$$

Dynamický součinitel
ustáleného kmitání



$$\frac{1}{1-r^2} = \frac{1}{1-(0,5)^2} = 1,333$$

Výsledná odezva se skládá z pohybu od působení sil a pohybu při vlastním kmitání

Výsledná odezva není jednoduchým harmonickým pohybem
Ustálená odezva je ve fázi s buzením ($r < 1$).

Maximální hodnota odezvy je větší než faktor zesílení
(dynamický součinitel) ustáleného stavu kmitání

$$\text{Úplný dynamický faktor zesílení } D_s = \max_t \frac{|u(t)|}{U_0} = 2,666$$

Rezonanční kmitání $u_p = \left(\frac{U_0}{1-r^2} \right) \cos \Omega t$ neplatí pro frekvenční poměr $r = 1$

Budící frekvence $f_b = \Omega/2\pi$ = Vlastní frekvenci $f_n = \omega_n/2\pi$

Amplituda kmitání pro oblast r blízké 1 prudce roste
pro $r = 1$ není její teoretická hodnota u soustav bez tlumení konečná

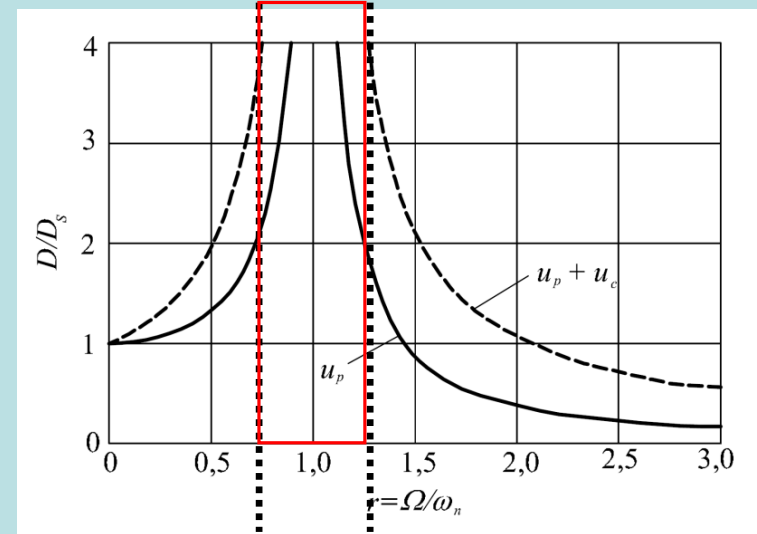
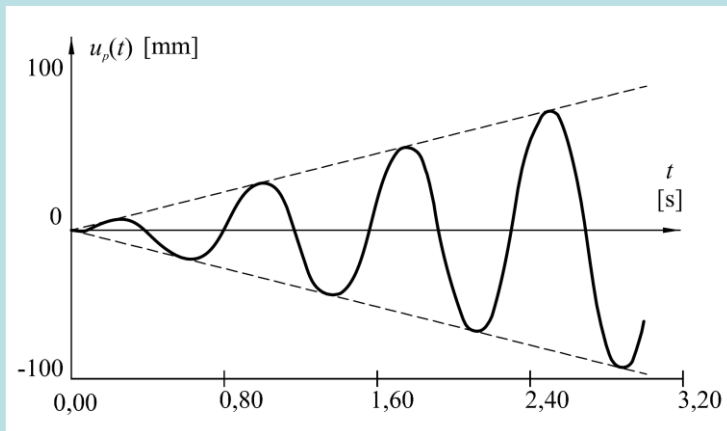
Při $r = 1$ nastává **rezonanční kmitání!** Prakticky **rezonanční oblast** $0,7 < r < 1,3$

Pohybová rovnice v případě rezonance

$$u_p = Ct \sin \Omega t \rightarrow m\ddot{u} + ku = p_0 \cos \Omega t$$

$$C = \frac{p_0}{2m\omega_n}$$

Odezva za rezonance $u_p = \frac{1}{2} (U_0 \omega_n t) \sin \omega_n t$



**Podrezonanční
oblast**

**Nadrezonanční
oblast**

Rezonanční oblast

Amplituda kmitání roste lineárně jako funkce času
Může nastat samobuzení konstrukce

Odezva viskózně tlumené soustavy s 1 SV na harmonické buzení

Soustava s 1 SV je tlumená
odpovídá více reálnému chování konstrukcí.

Pohybová rovnice v případě harmonického buzení

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \cos \Omega t$$

$$u_p = U \cos(\Omega t - \alpha) \quad \text{😊}$$

$$\dot{u}_p = -\Omega U \sin(\Omega t - \alpha)$$

$$\ddot{u}_p = -\Omega^2 U \cos(\Omega t - \alpha)$$

U - amplituda ustáleného kmitání

α - fázový posun

Ustálená odezva již není ve fázi nebo protifázi
s buzením což je zapříčiněno tlumením

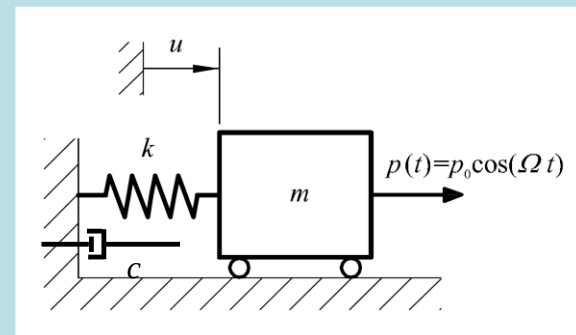
Projekce do osy R

$$\begin{aligned} -m\Omega^2 U \cos(\Omega t - \alpha) - c\Omega U \sin(\Omega t - \alpha) + kU \cos(\Omega t - \alpha) &= \\ &= p_0 \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

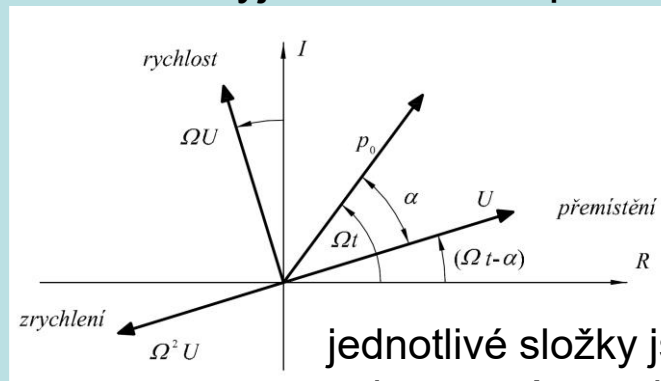
$$p_0^2 = (kU - m\Omega^2 U)^2 + (c\Omega U)^2$$

fázový posun

$$\tan \alpha = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$$

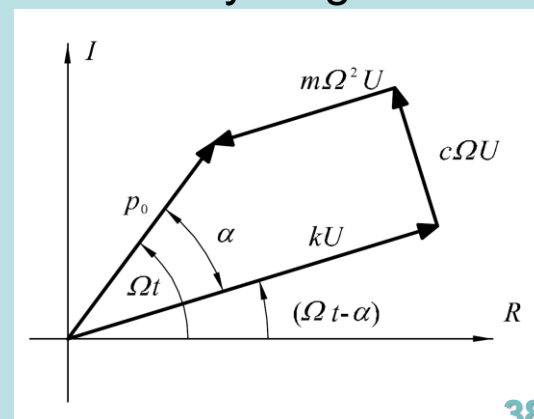


Grafické vyjádření v komplexní rovině



jednotlivé složky jsou rotující
vektory v této rovině

Silový diagram



Faktor zesílení – dynamický součinitel při ustálené odezvě

$$D_s = \frac{U}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

Velikost fázového posunutí $\tan \alpha = \frac{2\zeta r}{1-r^2}$

Dynamický součinitel za rezonance

$$(D_s)_{r=1} = \frac{1}{2\zeta}$$

Úplná odezva $u = u_p + u_c$

$$u(t) = \frac{U_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r^2)^2}} \cos(\Omega t - \alpha) + e^{-\zeta \omega_n t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]$$

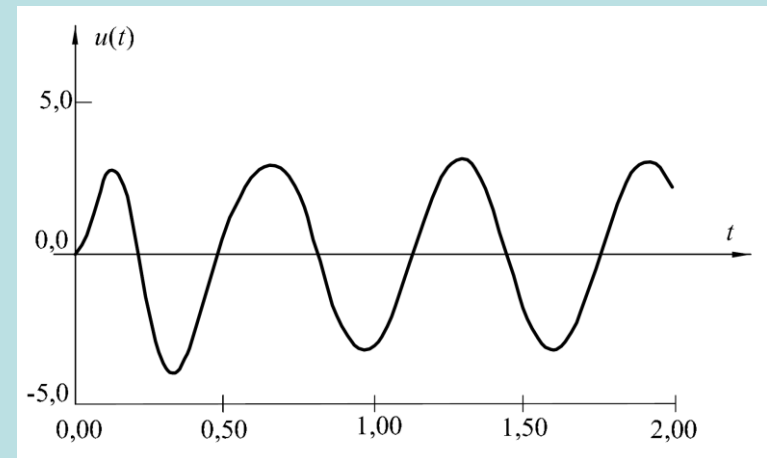
← Ustálená odezva →

← Vlastní kmitání →

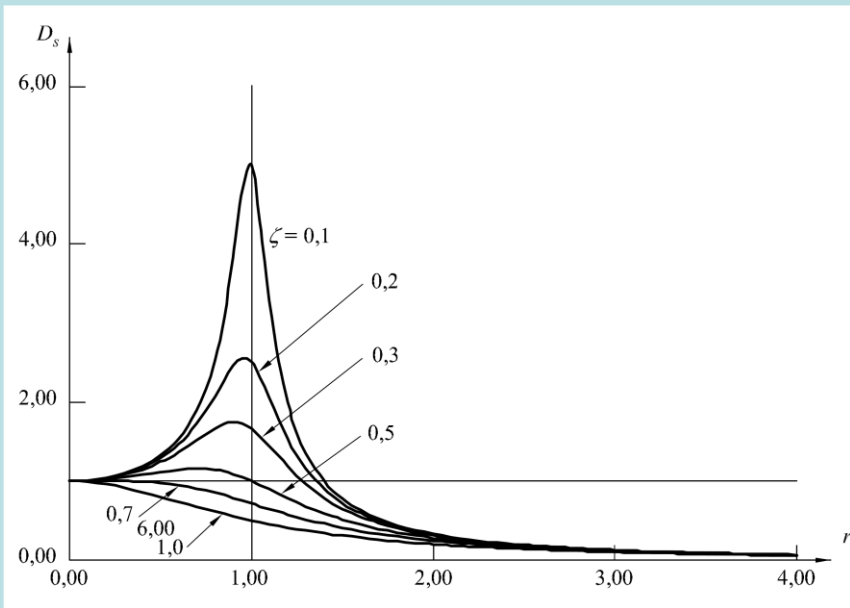
Konstanty A_1 a A_2 se určí
z počátečních podmínek

Pohyb odpovídající vlastnímu kmitání
v čase zanikne

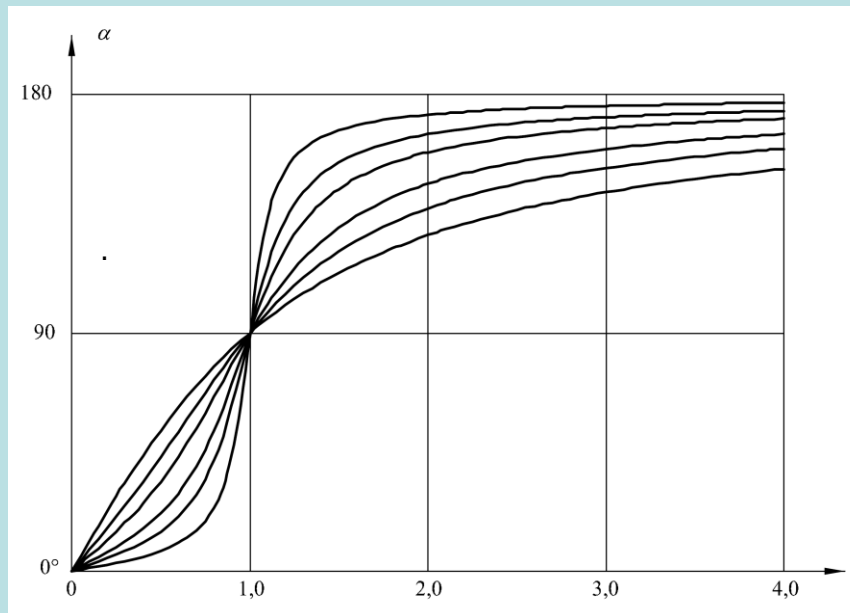
Po zániku vlastního kmitání soustava kmitá
ustáleným kmitáním



$$u(t) = 3,22 \cos(10t - 0,26) - e^{-4t} [3,1 \cos(19,6t) + 1,1 \sin(19,6t)]$$



Amplitudo frekvenční závislost
(charakteristika)



Fázový posun v závislosti na úrovni tlumení

Poznámky pro případ ustálené odezvy

Pohyb podle rovnice $u_p = U \cos(\Omega t - \alpha)$ je pohyb harmonický se stejnou frekvencí jako frekvence buzení

Amplituda ustálené odezvy je funkcí jak amplitudy a budicí frekvence, tak i vlastní frekvence a tlumení

Odezva $u_p = U \cos(\Omega t - \alpha)$ a buzení $p(t) = p_0 \cos(\Omega t)$ jsou fázově posunuty (dochází ke zpoždění α/Ω)

Dynamický součinitel za rezonance

$$(D_s)_{r=1} = \frac{1}{2\zeta}$$

je limitován pouze úrovní tlumení

U stavebních konstrukci je tlumení malé musíme vyloučit vznik rezonančního kmitání nebo snížit kmitání za rezonance (tlumiče kmitů)

Frekvenční odezva v komplexních číslech

Výchozí pohybovou rovnici lze rozložit jako projekce do osy R a osy I .
Předpokládá se, že pohyb odpovídá ustálenému kmitání.

Rovnice pro pohyb ve směru osy R $m\ddot{u}_R + c\dot{u}_R + ku_R = p_0 \cos(\Omega t)$

Rovnice pro pohyb ve směru osy I $m\ddot{u}_I + c\dot{u}_I + ku_I = p_0 \sin(\Omega t)$

Ustálená odezva $u_R = U \cos(\Omega t - \alpha) + u_I = U \sin(\Omega t - \alpha) \times i = \sqrt{-1}$

$m\ddot{\bar{u}} + c\dot{\bar{u}} + k\bar{u} = \bar{p} = p_0 e^{i\Omega t}$

Pohybová rovnice zapsaná v komplexních číslech

Odezva $\bar{u} = u_R + u_I$

Ustálené kmitání hledáme ve tvaru $\bar{u} = \bar{U} e^{i\Omega t}$

$\bar{U} = \frac{p_0}{(k - m\Omega^2) + ic\Omega}$

$\tan \alpha = \frac{u_I}{u_R} = \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$

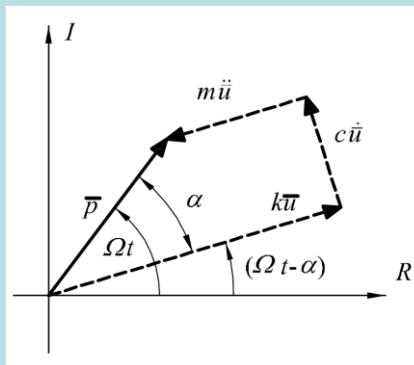
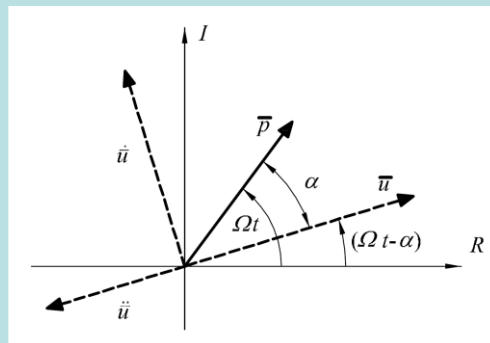
Funkce frekvenční odezvy v komplexních číslech

$\bar{H}(\Omega) = \frac{\bar{U}}{U_0} = \frac{1}{(1 - r^2) + i(2\zeta r)}$

Faktor zesílení při ustálené odezvě
(dynamický součinitel D_s)

$|\bar{H}(\Omega)| = \frac{|\bar{U}|}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$

Jednotlivé složky jsou
rotující vektory



Silový diagram

$\bar{u} = \bar{U} e^{i\Omega t}$

$\dot{\bar{u}} = i\Omega \bar{U} e^{i\Omega t} = i\Omega \bar{u}$

$\ddot{\bar{u}} = (i\Omega)^2 \bar{U} e^{i\Omega t} = -\Omega^2 \bar{u}$

a) Silový přenos. Síla je přenášena přes pružinu a tlumící člen

do pevného uchycení (základu) - jako příklad lze uvést přenášenou sílu do podzákladí při kmitání základu se strojem (stroj generuje harmonické buzení od nevývažku rotoru)

b) Buzení pohybem základu (podepření). Pohyb hmotného tělesa ve spojení pomocí pružiny a tlumiče s pohybujícím se základem (podepřením) - například se jedná o ustálené kmitání konstrukce (hmotného tělesa) připojené pomocí pružiny a tlumiče k vibračnímu stolu, který koná harmonický pohyb

Silový přenos

$$\bar{f}_{tr} = \bar{f}_s + \bar{f}_d = k\bar{u} + c\dot{\bar{u}} \quad \text{po dosazení ustálené odezvy } \bar{u} \text{ a derivace } \dot{\bar{u}}$$

$$\bar{f}_{tr} = (k + ic\Omega)\bar{U}e^{i\Omega t}$$

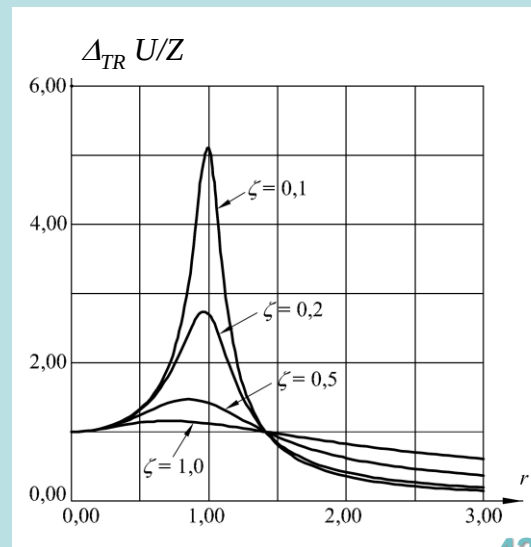
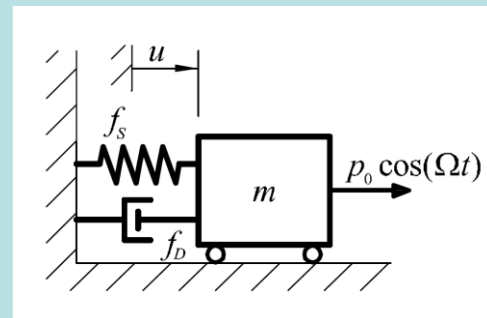
$$\bar{f}_{tr} = \left[\frac{(k + ic\Omega)U_0}{(1 - r^2) + i(2\zeta r)} \right] e^{i\Omega t} \quad \text{nebo} \quad \bar{f}_{tr} = \left[\frac{1 + i(2\zeta r)}{(1 - r^2) + i(2\zeta r)} \right] kU_0 e^{i\Omega t}$$

$$|\bar{f}_{tr}| = \frac{kU_0 \sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (|e^{i\Omega t}| = 1, |\bar{B}/\bar{A}| = |\bar{B}|/|\bar{A}|)$$

Koeficient přenosu

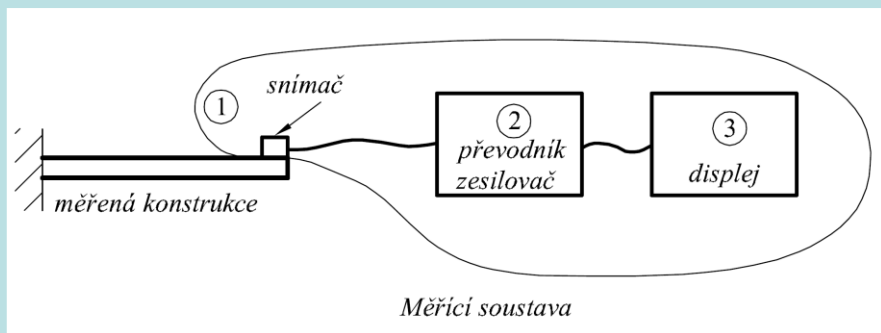
$$\Delta_{TR} = \frac{|\bar{f}_{tr}|}{kU_0} = D_S [1 + (2\zeta r)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

kde $p_0 = kU_0$ - poměr amplitudy dynamické síly f_{tr} k síle p_0



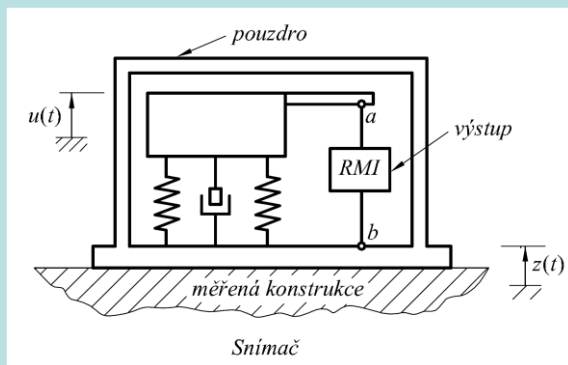
Po analýze těchto průběhů lze učinit tyto závěry:

1. Při buzení pohybem s frekvencí Ω , která je výrazně menší než vlastní frekvence ω_n soustavy, tj. při $r \ll 1$, je relativní pohyb tělesa vůči základu malý. Těleso se pohybuje se základem
2. Za rezonance, tj. když $\Omega = \omega_n$, při malém pohybu základu vznikají velké amplitudy relativního pohybu tělesa. Pouze tlumící síly limitují amplitudu pohybu
3. Při buzení pohybem s frekvencí Ω , která je výrazně větší než vlastní frekvence ω_n soustavy, tj. při $r \gg 1$, setrvačné síly pohybujícího se tělesa jsou tak veliké, že relativní pohyb sestává z pohybu základu vzhledem ke sledovanému tělesu. Těleso se prakticky nepohybuje.
4. Z uvedené teorie vychází návrh přístrojů pro měření vibrací.

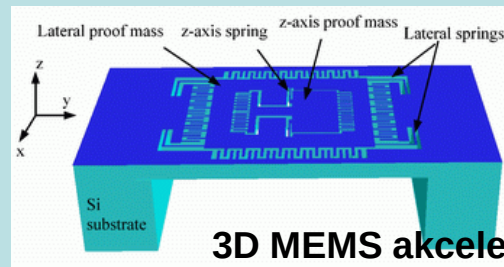


Přístroje lze rozdělit do dvou skupin podle naladění vůči kmitající konstrukci

V případě, že výstup je proporcionální pohybu podkladu (konstrukce) (musí mít velkou frekvenci) $\omega_n \ll \Omega$, jedná se o **vibrometry** $r > 3$ (dnes laser, radar)



Naopak, je-li výstup proporcionální zrychlení podkladu (konstrukce) (větší využití) $r \ll 1 \Rightarrow D_s \cong 1$, jedná se o **akcelerometry**



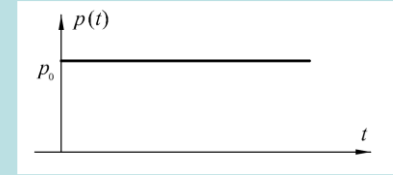
ODEZVA SOUSTAV S 1 SV NA SPECIÁLNÍ PŘÍPADY BUZENÍ

5

Odezva viskózně tlumené soustavy s 1SV vyvolaná náhlým účinkem zatížení stálé velikosti

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \quad t \geq 0$$

Soustava je v čase před přiložením zatížení v klidu $u(0) = \dot{u}(0) = 0$



Partikulární řešení $u_p = \frac{p_0}{k}$

Obecné řešení pro $\zeta < 1$ $u_c = e^{-\zeta\omega_n t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]$

Celkové řešení $u = u_p + u_c$

Pohybová rovnice - tlumená soustava

Po dosazení počátečních podmínek

$$u = \frac{p_0}{k} \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[\cos\omega_d t + \left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \right) \sin\omega_d t \right] \right\}$$

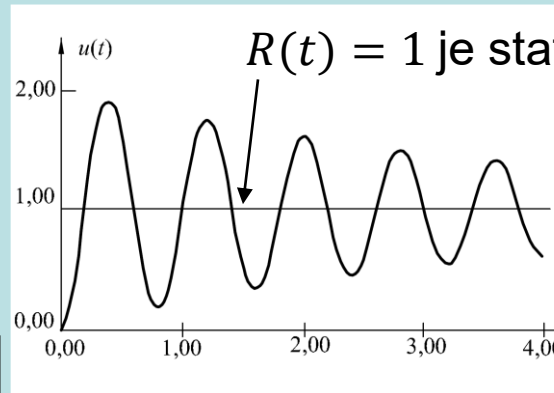
Poměr odezvy (dynamický součinitel zatížení)

$$R(t) = \frac{ku(t)}{\max_t |p(t)|} = \frac{ku(t)}{p_{\max}}$$

Pro $p_{\max} = p_0$

$$R(t) =$$

$$= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[\cos\omega_d t + \left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \right) \sin\omega_d t \right]$$



$R(t) = 1$ je statická rovnovážná poloha

Netlumená soustava

$$u(t) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos\omega_n t)$$

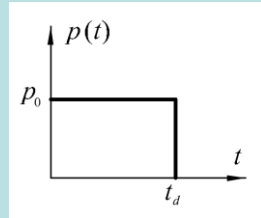
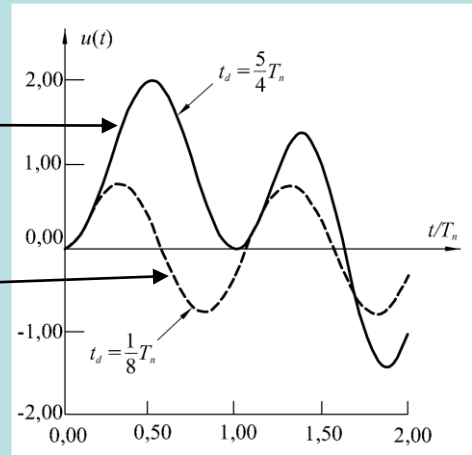
$$R_{\max} = 2$$

$$t = \frac{T_n}{2}$$

Odezva netlumené soustavy s 1SV na účinek obdélníkového impulsu

Z předchozího případu vyplývá, že maximální rozkmit nastane během poloviny cyklu

- a) Je-li $t_d > \frac{T_n}{2}$ maxima je dosaženo během působení zatížení
- b) Je-li $t_d < \frac{T_n}{2}$ maxima je dosaženo během dokmitávání.



Průběh odezvy je nutno řešit jako odezvu pro časovou oblast, kdy působí zatížení, a kdy již zatížení nepůsobí. -

a) Odezva na zatížení náhlým účinkem stálého zatížení v časové oblasti $0 \leq t \leq t_d$

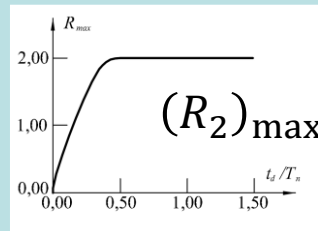
$$u(t) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega_n t) \quad R_1(t) = 1 - \cos \omega_n t \quad \text{při} \quad t = \frac{T_n}{2} \Rightarrow (R_1)_{\max} = R_1\left(\frac{T_n}{2}\right) = 2$$

b) Odezva v čase $t > t_d$ - zatížení nepůsobí dochází k dokmitávání

Vlastní (volné kmitání) při „počátečních“ podmínkách $u(t_d)$ a $\dot{u}(t_d)$

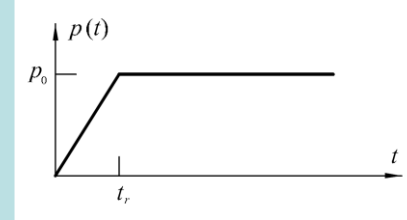
$$u(t) = u(t_d) \cos \omega_n (t - t_d) + \left[\frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n} \right] \sin \omega_n (t - t_d) \quad (R_2)_{\max} = \left\{ [R_1(t_d)]^2 + \left[\frac{\dot{R}_1(t_d)}{\omega_n} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$R_2(t) = R_1(t_d) \cos \omega_n (t - t_d) + \left[\frac{\dot{R}_1(t_d)}{\omega_n} \right] \sin \omega_n (t - t_d) \quad (R_2)_{\max} = 2 \sin \left(\frac{\pi t_d}{T_n} \right)$$



Odezva netlumené soustavy s 1SV na zatížení od počátku lineárně rostoucí do hodnoty p_0 a dále stále působící

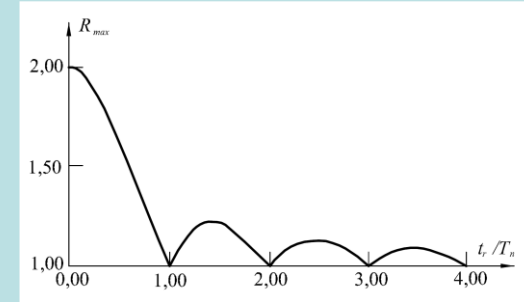
$$m\ddot{u} + ku = \begin{cases} \left(\frac{t}{t_r}\right)p_0, & 0 \leq t \leq t_r, \\ p_0, & t_r \leq t. \end{cases} \quad u(0) = \dot{u}(0) = 0$$



Pro $0 \leq t \leq t_r$ partikulární řešení

$$u_p = \left(\frac{t}{t_r}\right)\left(\frac{p_0}{k}\right)$$

Pohybová rovnice $u = \left(\frac{t}{t_r}\right)\left(\frac{p_0}{k}\right) + A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t)$

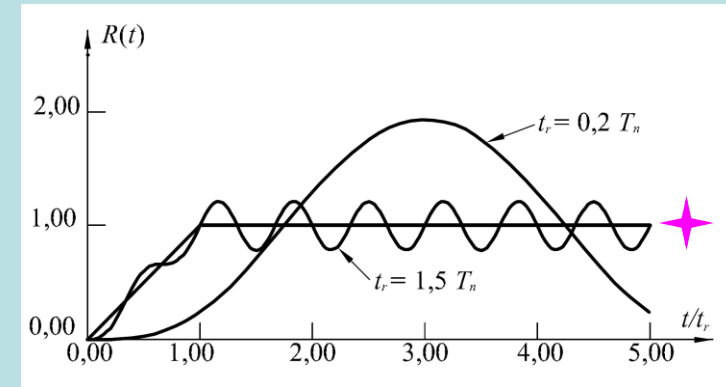


Po zavedení počátečních podmínek pro časovou oblast $0 \leq t \leq t_r$

$$u = \left(\frac{p_0}{k}\right) \left[\left(\frac{t}{t_r}\right) - \left(\frac{1}{\omega_n t_r}\right) \sin \omega_n t \right]$$

Pro časovou oblast $t_r \geq t$

$$u = \left(\frac{p_0}{k}\right) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{\omega_n t_r}\right) [\sin \omega_n (t - t_r) - \sin \omega_n t] \right\}$$



Je-li $t_r \gg T_n$ potom dynamická odezva přechází ve statickou odezvu

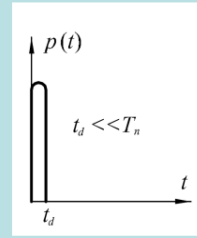
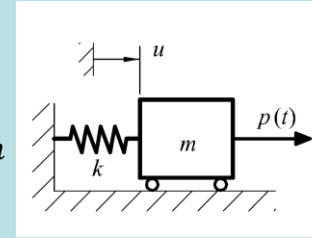
$$u_{pseudostat} = \left(\frac{t}{t_r}\right)\left(\frac{p_0}{k}\right)$$

Maximum odezvy  $R_{max} = 2$, když t_r se blíží nule

Odezva netlumené soustavy s 1SV na krátkodobý impuls

Na soustavu působí síla velké intenzity velmi krátkou dobu

$$m\ddot{u} + ku = \begin{cases} p_0, & 0 \leq t \leq t_d, \\ 0, & t_d \leq t. \end{cases} \quad u(0) = \dot{u}(0) = 0 \quad t_d \ll T_n$$



Po integraci + počáteční podmínky $m\dot{u}(t_d) + ku_{pr}t_d = I$ Impuls síly $I = \int_0^{t_d} p(t)dt$
 u_{pr} je (malá) průměrná hodnota přemístění v časovém intervalu $0 \leq t \leq t_d$

Při $t_d \rightarrow 0$, tj. $t_d \ll T_n$, druhý člen v levé části rovnice lze zanedbat $m\dot{u}(0^+) = I$

Počáteční podmínky v čase 0^+ $u(0^+) = 0$ a $\dot{u}(0^+) = \frac{I}{m}$

$$u = u(0^+) \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{u}(0^+)}{\omega_n} \right) \sin \omega_n t \quad \Rightarrow \quad u(t) = \left(\frac{I}{m\omega_n} \right) \sin(\omega_n t)$$

Odezva na jednotkový impuls $I = 1$ netlumená soustava

$$h(t) = \left(\frac{1}{m\omega_n} \right) \sin(\omega_n t)$$

Odezva tlumené soustavy

Odezva na jednotkový impuls $I = 1$

$$u(t) = \left(\frac{I}{m\omega_n} \right) e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

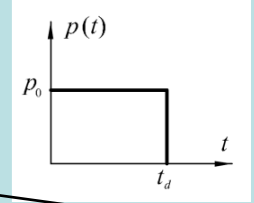


$$h(t) = \left(\frac{1}{m\omega_n} \right) e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

Příklad: Dokažte, že rovnice pro řešení netlumené soustavy s 1SV na účinek obdélníkového impulsu se bude shodovat s odezvou na krátkodobý impuls v případě $t_d \ll T_n$

Řešení: Ke konci působení zatížení

$$u(t_d) = \left(\frac{p_0}{k}\right) [1 - \cos(\omega_n t_d)]$$



Derivace podle času

$$\dot{u}(t_d) = \frac{\omega_n p_0}{k} \sin(\omega_n t_d)$$

Protože platí $\omega_n T_n = 2\pi$, potom pro $t_d \ll T_n$ platí $\omega_n t_d \ll 2\pi$

Funkci $\cos$ rozložíme do řady a použijeme první dva členy řady

$$[1 - \cos(\omega_n t_d)] \cong \frac{1}{2} (\omega_n t_d)^2$$

Pro malé hodnoty argumentu $\omega_n t_d$ platí, $\sin \omega_n t_d \cong \omega_n t_d$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots$$

Impuls I pro konstantní sílu je roven $p_0 t_d$

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$$

$$u(t_d) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{p_0}{k}\right) (\omega_n t_d)^2 = \left(\frac{I}{2}\right) \left(\frac{t_d}{m}\right)$$

$$\dot{u}(t_d) \cong \left(\frac{\omega_n p_0}{k}\right) (\omega_n t_d) = \frac{I}{m}$$

$$u(t) = u(t_d) \cos \omega_n(t - t_d) + \left[\frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n} \right] \sin \omega_n(t - t_d)$$

$$u(t) = \lim_{t_d \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{I t_d}{2m}\right) \cos[\omega_n(t - t_d)] + \left(\frac{I}{m \omega_n}\right) \sin[\omega_n(t - t_d)] \right\}$$

Nakonec pro $t_d \rightarrow 0$

$$u(t) = \left(\frac{I}{m \omega_n}\right) \sin(\omega_n t)$$

Odezva soustav s 1SV na obecné dynamické buzení

Podstata metody řešení dynamické odezvy soustavy s 1SV na obecné buzení vychází z funkce odezvy na impulsní zatížení a využívá princip superpozice.

$$du(t) = \left(\frac{dI}{m\omega_n} \right) \sin[\omega_n(t - \tau)] \quad dI = p(\tau)d\tau$$

Úplná odezva v čase t je součtem odezev na všechny elementární impulsy

Pro netlumenou soustavu na počátku v klidu $u(0) = \dot{u}(0) = 0$

$$u(t) = \left(\frac{1}{m\omega_d} \right) \int_0^t p(\tau) \sin[\omega_d(t - \tau)] d\tau$$

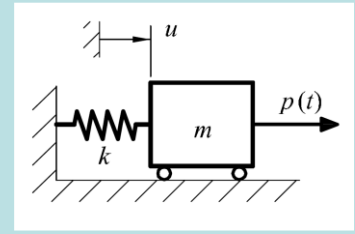
nebo

$$u(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

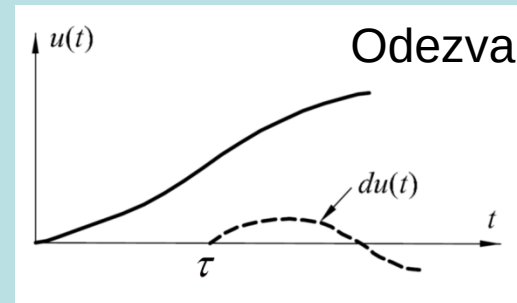
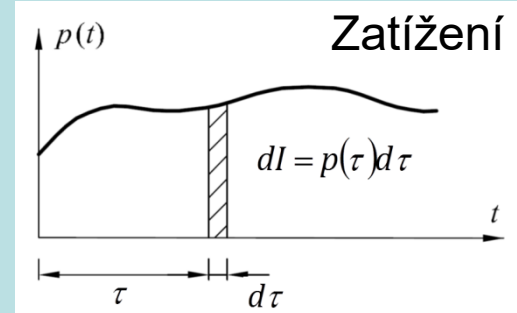
Duhamelův integrál
popřípadě konvoluční integrál

kde $h(t - \tau) = \left(\frac{1}{m\omega_n} \right) \sin[\omega_n(t - \tau)]$

Výpočet odezvy $u(t)$ se provádí speciálními numerickými postupy



6



Pro netlumené soustavy s nenulovými počátečními podmínkami

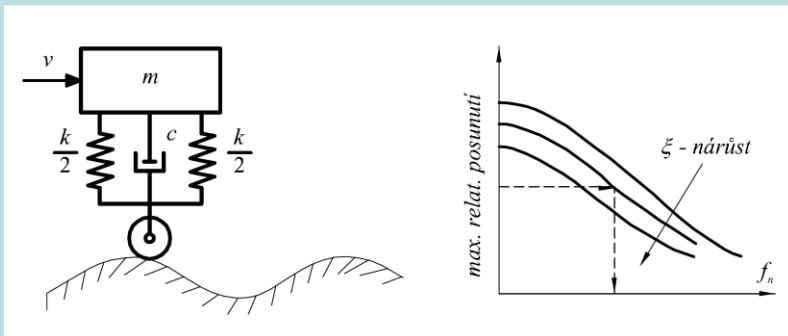
$$u(t) = \left(\frac{1}{m\omega_n} \right) \int_0^t p(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau + u_0 \cos(\omega_n t) + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \right) \sin(\omega_n t)$$

Pro tlumené soustavy s nenulovými počátečními podmínkami

$$u(t) = \left(\frac{1}{m\omega_d} \right) \int_0^t p(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_d(t - \tau)] d\tau + u_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) + \left(\frac{1}{\omega_d} \right) (\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0) e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t).$$

Spektrum odezvy je **graf maxim „odezvy“** (posunutí, zrychlení, napětí atd.) **jednostupňové soustavy na zadanou funkci buzení** v závislosti na některém parametru - nejčastěji na vlastní frekvenci (periodě)

Spektra odezvy se sestavují pro různé úrovně tlumení soustavy



Spektrum odezvy
relativního posunutí

Numerické řešení dynamické odezvy soustavy s jedním stupněm volnosti

7

Numerické řešení založené na aproximaci derivací

– přímá integrace pohybové rovnice

Existuje spousta postupů jak derivace aproximovat a tím získat integrační schéma

Postupy (metody) vycházejí z předpokladu, že čas se **diskretizuje** - oblast řešení se rozdělí na konečný počet časových úseků

Řešení získáme pomocí integračních schémat pouze ve vybraných **diskrétních** časových okamžicích - kroková integrace pohybové rovnice – step by step

Metoda průměrného zrychlení - Newmarkova metoda ($\beta = 1/4$)

Pohybová rovnice $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$

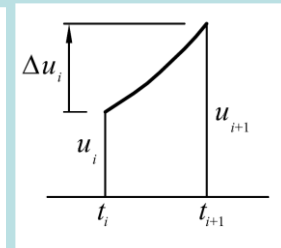
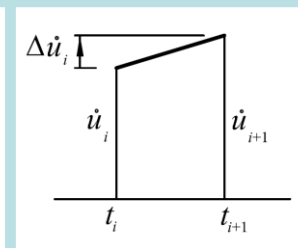
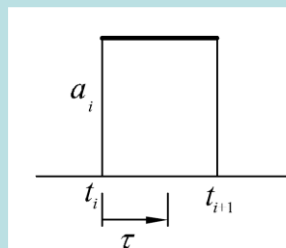
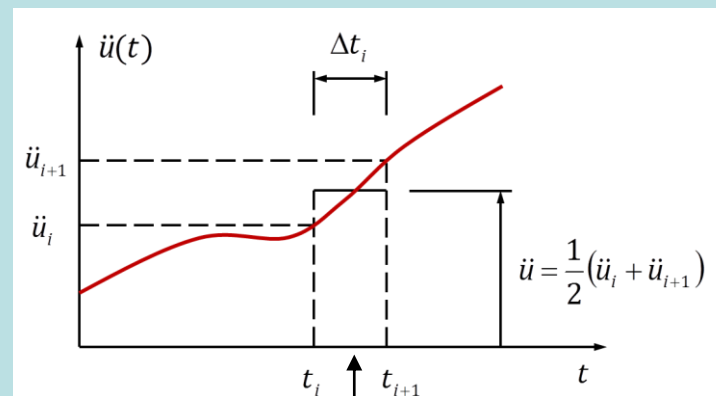
Počáteční podmínky u_0 a $\dot{u}_0$

Derivace podle času se nahradí přibližným vyjádřením

Předpokládá se, že v časovém kroku je zrychlení průměrem hodnot v čase t_i a v čase t_{i+1}

Zrychlení v intervalu $t_i \div t_{i+1}$, v čase τ

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$



Po integraci

Rychlost $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \left(\frac{\Delta t_i}{2}\right)(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$ a výchylka $u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t_i + \left(\frac{\Delta t_i^2}{4}\right)(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$

Změna za časový úsek $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, Δp_i , Δu_i , $\Delta \dot{u}_i$ a $\Delta \ddot{u}_i$

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i, \quad \Delta \ddot{u}_i = \left(\frac{4}{\Delta t_i^2}\right)(\Delta u_i + \dot{u}_i \Delta t_i) - 2\ddot{u}_i \quad \text{a} \quad \Delta \dot{u}_i = \left(\frac{2}{\Delta t_i}\right)\Delta u_i - 2\dot{u}_i \quad \star$$

Pohybová rovnice

$$m\Delta \ddot{u}_i + c\Delta \dot{u}_i + k\Delta u_i = \Delta p_i$$

Po dosazení do pohybové rovnice $\star$

$$k^* \Delta u_i = \Delta p_i^* \quad \text{kde} \quad k_i^* = k + \left(\frac{2c}{\Delta t_i}\right) + \left(\frac{4m}{\Delta t_i^2}\right) \quad \text{a} \quad \Delta p_i^* = \Delta p_i + \left[\left(\frac{4m}{\Delta t_i}\right) + 2c\right]\dot{u}_i + 2m\ddot{u}_i$$

Z rovnice se vyčíslí Δu_i

Zpětně po dosazení do rovnic $\star$ se vyčíslí $\Delta \dot{u}_i$ a $\Delta \ddot{u}_i$

Nakonec $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$, $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i$ a $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i$ a jde se na další krok

Získané řešení je přibližné a přesnost je závislá na výběru velikosti integračního kroku

Doporučuje se volit
časový krok z podmínky

$$\Delta t \leq \frac{T}{10}$$

T je nejmenší perioda buzení anebo vlastní
perioda T_n soustavy

Odezva soustavy s jedním stupněm volnosti na periodické buzení

Frekvenční analýza

1. Odezva na periodické buzení. Fourierův rozvoj v reálných číslech

Zatížení, které se mění s periodou T_1

$$p(t + T_1) = p(t)$$

Zatížení lze rozložit na součet harmonických zatížení!

Rozklad funkce do Fourierovy řady

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega_1 t)$$

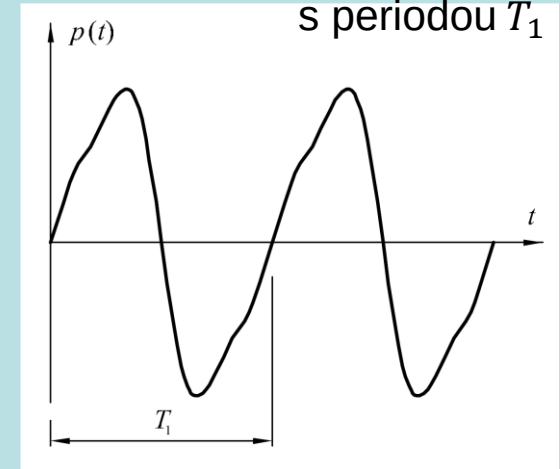
kde $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, a_n a b_n jsou koeficienty n -té harmonické složky

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{\tau}^{\tau+T_1} p(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T_1} \int_{\tau}^{\tau+T_1} p(t) \cos(n\Omega_1 t) dt \quad b_n = \frac{2}{T_1} \int_{\tau}^{\tau+T_1} p(t) \sin(n\Omega_1 t) dt$$

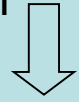
kde τ je libovolný čas

Uspokojivé přesnosti v aproximaci funkce zatížení lze dosáhnout při relativně malém počtu členů řady

Periodické buzení
s periodou T_1



Příklad: Vyjádřete výrazy pro koeficienty Fourierovy řady popisující funkci
 Vykreslete grafy pro 1, 2 a 3 členy Fourierovy řady



$$\underbrace{-T_1/2 \leq t \leq T_1/2}_{\text{perioda } T_1} \quad a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} p(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} p(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} p(t) \sin(n\Omega_1 t) dt$$

$$\text{kde } p(t) = \begin{cases} -p_0 & \text{pro } -\frac{T_1}{2} < t < 0, \\ p_0 & \text{pro } 0 < t < \frac{T_1}{2}. \end{cases}$$

Po úpravě a vyčíslení výše uvedených vztahů $a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{4p_0}{T_1} \int_0^{T_1/2} \sin(n\Omega_1 t) dt \quad b_n = \frac{4p_0}{T_1} \left(\frac{-1}{n\Omega_1} \right) \cos(n\Omega_1 t) \Big|_0^{T_1/2}$$

$$b_n = \frac{-2p_0}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1]$$

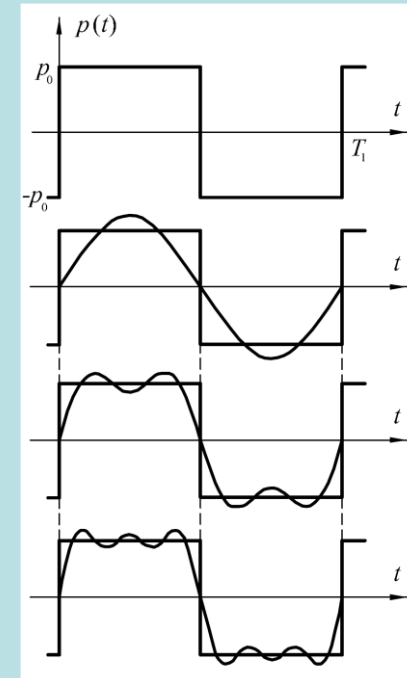
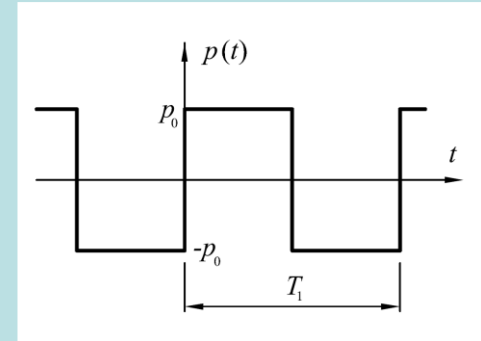
$$\Omega_1 t_1 = 2\pi$$

$$b_n = \frac{-2p_0}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] \quad \text{nebo}$$

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega_1 t)$$

$$b_n = \frac{4p_0}{n\pi}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$p(t) = \frac{4p_0}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \left(\frac{1}{n} \right) \sin(n\Omega_1 t)$$



Příklad: Určete ustálenou odezvu soustavy na periodické obdélníkové zatížení s $\omega_n = 6\Omega_1$

Řešení: Pro ustálenou odezvu při harmonickém buzení $p_0 \cos(\Omega t)$

$$u = \left(\frac{p_0/k}{1 - r^2} \right) \cos(\Omega t) \quad \text{frek. poměr} \quad r = \frac{\Omega}{\omega_n} = \Omega \sqrt{m/k}$$

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin(n\Omega_1 t) \quad P_n = \begin{cases} \frac{4p_0}{n\pi} & \text{pro } n \text{ liché} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$$

Typický člen ustálené odezvy (pro n -tý člen)

$$u_n = \frac{P_n}{k(1 - r_n^2)} \quad r_n = \frac{n\Omega_1}{\omega_n}$$

Ustálená odezva

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin(n\Omega_1 t)$$

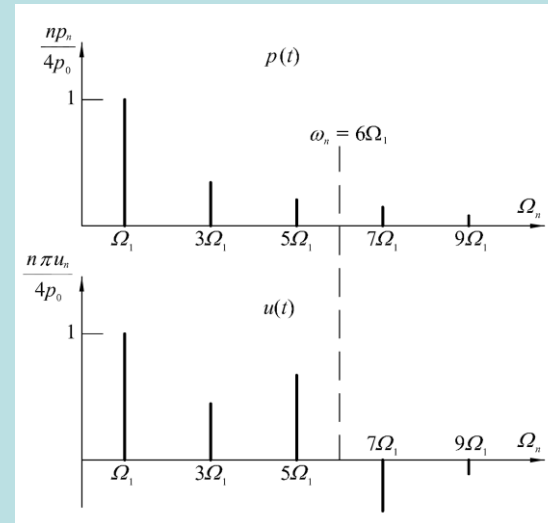
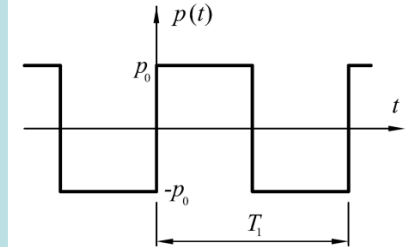
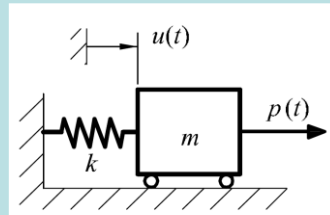
kde $U_n = \frac{4p_0}{nk\pi[1 - (n\Omega_1/\omega_n)^2]}$

Pro liché členy

$$u = \frac{4p_0}{k\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin(n\Omega_1 t)}{n[1 - (n\Omega_1/\omega_n)^2]}$$

$$\frac{P_n}{p_0} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{pro } n \text{ liché} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$$

$$\frac{U_n}{p_0/k} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi[1 - (n/6)^2]} & \text{pro } n \text{ liché} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$$



2. Odezva na periodické buzení. Fourierův rozvoj v komplexních číslech

Komplexním Fourierův rozvoje zatížení

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{P}_n e^{i(n\Omega_1 t)} \quad \star \text{ Pruh nad } P_n \text{ ukazuje, jsou koeficienty mohou být komplexní}$$

Platí vztah $\int_{\tau}^{\tau+T_1} e^{i(n\Omega_1 t)} e^{-i(m\Omega_1 t)} dt = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ T_1 & \text{pro } n = m \end{cases}$ Po vynásobení rovnice $e^{-i(n\Omega_1 t)}$ $\star$

Potom $\bar{P}_n = \frac{1}{T_1} \int_{\tau}^{\tau+T_1} p(t) e^{-i(n\Omega_1 t)} dt, n = 0, \pm 1, \bar{P}_{-n} = \bar{P}_n^*$ komplexně sdružené k $\bar{P}_n$ $\bullet$

Ustálená odezva v komplexních číslech

$$\bar{u}(t) = \bar{U} e^{i\Omega t} = \bar{H}(\Omega) p_0 e^{i\Omega t}, \text{ kde } \bar{H}(\Omega) = \frac{1/k}{[1 - (\Omega/\omega_n)^2] + i(2\zeta \Omega/\omega_n)}$$

a $\bar{P}_0 = \frac{1}{T_1} \int_{\tau}^{\tau+T_1} p(t) dt$

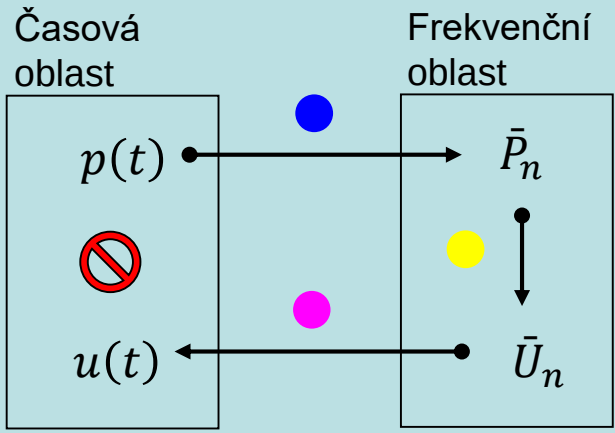
Periodické buzení popsané komplexní Fourierovou řadou

$$p(t) = \sum P_n e^{i(n\Omega_1 t)}$$

Ustálená odezva $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{U}_n e^{i(n\Omega_1 t)}, \bullet$

kde $\bar{U}_n = \bar{H}_n \bar{P}_n = |\bar{H}_n| |\bar{P}_n| e^{i(\alpha_{H_n} + \alpha_{P_n})}$ $\bullet$

a $\bar{H}_n(\Omega) = \frac{1/k}{[1 - (n\Omega_1/\omega_n)^2] + i(2\zeta n \Omega_1/\omega_n)}$



Matematické modely spojitých soustav

9

Soustavy s nekonečným počtem stupňů volnosti - kontinuum

Popis s použitím rovnic pružnosti – v každém bodě 3 složky posunutí

U prostorové poddajného tělesa v prostoru 3 x ∞ stupňů volnosti

Sestavení pohybových rovnic (spojitá soustava) – využití 2. Newtonova zákona

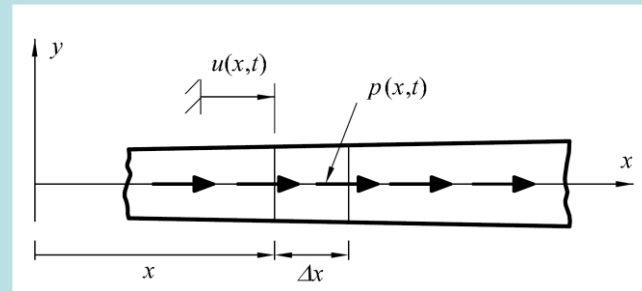
Podélně namáhaný prut osovými silami $p(x, t)$

Výchozí předpoklady:

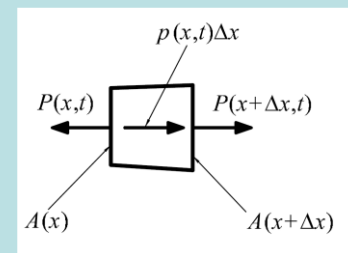
a) průřezy zůstávají po deformaci rovinné

b) materiál je lineárně pružný,

c) materiálové vlastnosti (E, ρ) jsou konstantní v průřezu, ale mohou se měnit při změně souřadnice x



Platí: $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$, $\sigma_x = E\varepsilon_x$, $P = A\sigma_x \Rightarrow P = AE \frac{du}{dx}$ ☀



Newtonův zákon

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = (\Delta m)a_x \Rightarrow p\Delta x + P(x + \Delta x, t) - P(x, t) = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad / \Delta x \quad \text{Silový diagram}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{P(x + \Delta x, t) - P(x, t)}{\Delta x} \right) + p = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Pro $\Delta x \rightarrow 0$ $\frac{\partial P}{\partial x} + p = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial u}{\partial x} \right) + p = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Typy okrajových podmínek v místě $x = x_e$

Silová okrajová podmínka – volný nezatížený konec

$$P(x_e, t) = 0$$

Kinematická okrajová podmínka – volný nezatížený konec

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Kinematická okrajová podmínka – neposuvný konec

$$u(x_e, t) = 0$$

Další možnosti

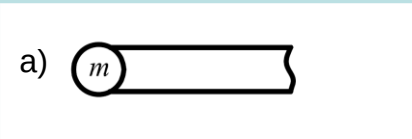
Příklad: Určete okrajové podmínky v místě $x = 0$ pro případ

a) Na volném konci je soustředěná hmotnost m

Pohybová rovnice pro připojenou soustředěnou hmotnost

$$P(0, t) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=0} \quad \text{Dále platí} \quad P = AE \frac{du}{dx} \quad \text{☀}$$

$$P(0, t) = AE \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \text{Nakonec} \quad \boxed{AE \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=0}}$$

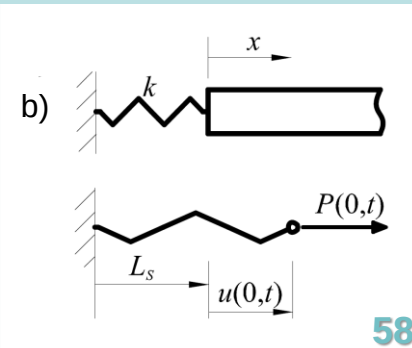


b) Konec prutu je pružně opřen - lineární pružina s tuhostí k

Síla v pružině $P(0, t) = ku(0, t)$

Potom viz ☀ platí

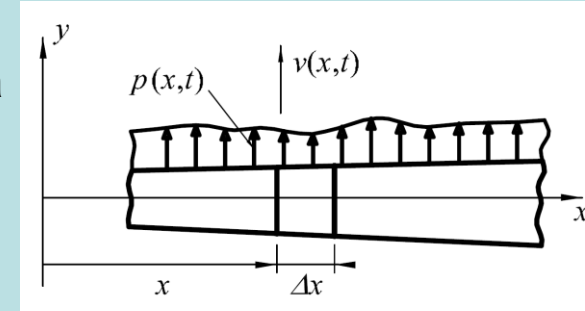
$$\boxed{AE \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = ku(0, t)}$$



Příčné kmitání lineárně pružných prutů (Bernoulliho – Eulerova teorie)

Bernoulliho–Eulerovy předpoklady:

- a) osa nosníku je neutrální osou – není roztahována ani stlačována
- b) příčné průřezy jsou rovinné a kolmé k neutrální ose
jak před deformací, tak i po deformaci – tj. vliv smykové deformace je zanedbán
- c) materiál je lineárně pružný a prut je homogenní v libovolném průřezu
- d) Napětí σ_y a σ_z jsou zanedbatelné ve srovnání s napětím σ_x
- e) rovina xy je hlavní rovinou



Z kinematiky je známo, že deformace ε_x je závislá na křivosti $1/\rho$ vztahem $\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}$

$$M(x, t) = \frac{EI}{\rho} \quad E \text{ modul pružnosti, } I \text{ je moment setrvačnosti průřezu}$$

Pohybové rovnice pro část nosníku délky Δx s použitím Newtonova zákona

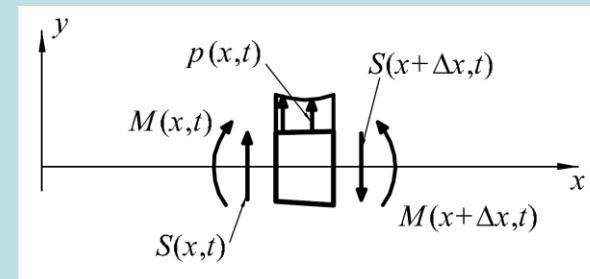
$$+\uparrow \sum F_y = (\Delta m)a_y \quad * \quad \text{a} \quad \curvearrowright \sum M_G = (\Delta I_G)\alpha$$

Ve druhé rovnici G označuje těžiště a α je úhlové zrychlení

Po zanedbání rotačních setrvačných sil $\sum M_G = 0$

Po rozepsání rovnice *

$$S(x, t) - S(x + \Delta x, t) + p(x, t)\Delta x = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$



$M(x, t)$ je ohybový moment,
 $S(x, t)$ je příčná síla,
 $V(x, t)$ je příčný posuv,
 $p(x, t)$ je spojité zatížení na j. d.

$$S(x, t) - S(x + \Delta x, t) + p(x, t)\Delta x = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{rovnice se dělí členem } \Delta x$$

při $\Delta x \rightarrow 0$ $-\frac{\partial S}{\partial x} + p(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$

Diferenciální podmínka rovnováhy $S = \frac{\partial M}{\partial x}$

V případě malých pootočení $\frac{\partial v}{\partial x}$ lze křivost aproximovat vztahem $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Ohybový moment M závislosti na křivosti

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Pohybová rovnice příčného kmitání

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t)$$

Typy okrajových podmínek

a) Vetknutí

$$v(x_e, t) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=x_e} = 0$$

c) Nezatížený volný konec

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=x_e} = 0$$

$$M(x_e, t) = 0$$

b) Prosté podepření na konci

$$v(x_e, t) = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=x_e} = 0$$

$$M(x_e, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=x_e} = 0$$

$$S(x_e, t) = 0$$

Příklad: Sestavte pohybovou rovnici prutu zatíženého spojitým zatížením a silou N rovnoběžnou s osou x

Osově stlačení prutu je zanedbáno

Pohybové rovnice pro část nosníku

$$+\uparrow \sum F_y = (\Delta m)a_y \qquad \oplus \sum M_G = (\Delta I_G)\alpha$$

Dvě podmínky rovnováhy

1. rovnice

$$-\frac{\partial S}{\partial x} + p(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

2. rovnice

$$M(x + \Delta x, t) - M(x, t) + N[v(x + \Delta x, t) - v(x, t)] - S(x + \Delta x, t)\Delta x = 0$$

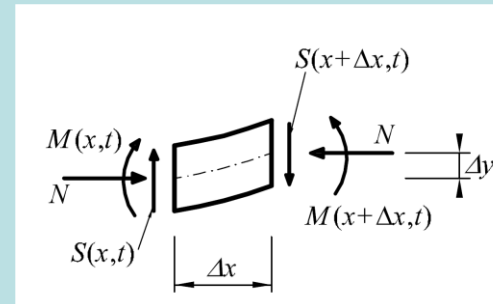
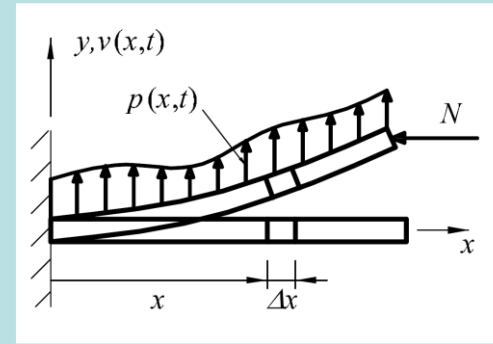
Dělením Δx , a pro $\Delta x \rightarrow 0$ v limitě

$$\frac{\partial M}{\partial x} + N \frac{\partial v}{\partial x} - S = 0$$

Spojením rovnic 1, 2 a $M(x, t) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t)$$



Hamiltonův princip

Hamiltonův princip pracuje s kinetickou a potenciální energií (skaláry)

Okrajové podmínky jsou zaváděny v procesu sestavování rovnic

Základní předpoklad - konfigurace soustavy jsou specifikovány v čase t_1 a t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}dt = 0$$

Hamiltonův princip

T je úplná kinetická energie soustavy

V je potenciální energie soustavy

(energie deformace a potenciální energie konzervativních vnějších sil)

δW_{nc} je virtuální práce nekonzervativních sil zahrnující tření a vnějších sil nezahrnutých do V

$\delta()$ je symbol první variace, virtuální změna

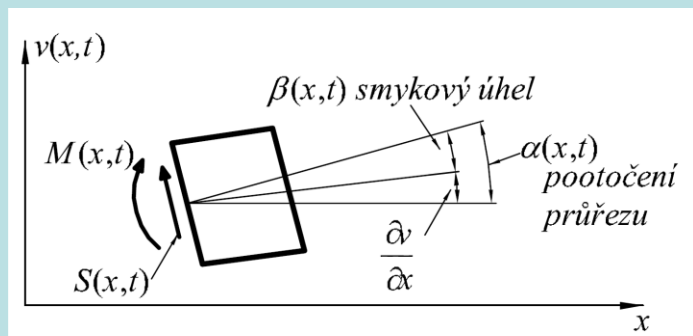
t_1, t_2 je čas, ve kterém je konfigurace známa

HP lze použít také pro klasická pole (např. elektromagnetické nebo gravitační pole) a byl také rozšířen pro použití v dalších oblastech, např. kvantové mechanice nebo kvantové teorii pole



Sir William Rowan Hamilton
(4. srpna, 1805 - 2. září, 1865)
byl Irský matematik, fyzik,
a astronom

Aplikace Hamiltonova principu – ohýbaný prut se smykovou deformací a rotační setrvačností (Timošenkova teorie)



Element prutu se smykovou deformací a deformací od ohybu

Pro úhel β platí
$$\beta = \alpha - \frac{\partial v}{\partial x}$$

Z teorie ohýbaného prutu $M = EI\alpha'$

Energie deformace od ohybu

$$V_b = \frac{1}{2} \int_0^L EI(\alpha')^2 dx$$

Kinetická energie prutu

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (\dot{v})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I (\dot{\alpha})^2 dx$$

Energie deformace od smyku

$$V_s = \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA \beta^2 dx$$

smykový koeficient κ
obdél. průřez $\kappa = 5/6$

Virtuální práce - spojité příčné zatížení $p(x, t)$

$$\delta W_{nc} = \int_0^L p(x, t) \delta v(x, t) dx$$

Po dosazení do vztahu popisující Hamiltonův princip

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta [\rho A \dot{v}^2 + \rho I \dot{\alpha}^2 - EI(\alpha')^2 - \kappa GA(\alpha - v')^2] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L p \delta v dx dt = 0.$$

Po integraci per partes (lze vyloučit $()'$ a $()\cdot$ z výrazů $\delta()$) a pro konfiguraci v čase t_1 a t_2 položíme $\delta v(x, t_1) = \delta v(x, t_2) = \delta \alpha(x, t_1) = \delta \alpha(x, t_2) = 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \{ -\rho A \ddot{v} - [\kappa GA(\alpha - v')] ' + p \} \delta v dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [-\rho I \ddot{\alpha} + (EI \alpha') ' - \kappa GA(\alpha - v')] \delta \alpha dx dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} [\kappa GA(\alpha - v')] \delta v \Big|_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2} [EI \alpha'] \delta \alpha \Big|_0^L dt = 0$$

potom ★ $[\kappa GA(\alpha - v')] ' + \rho A \ddot{v} = p(x, t)$ a ★ $\kappa GA(\alpha - v') - (EI \alpha') ' + \rho I \ddot{\alpha} = 0$

Zobecněné okrajové podmínky δv a $\delta \alpha$ jsou libovolné

$$\begin{array}{ll} \blacklozenge (\kappa GA \beta) \delta v = 0, x = 0 & \blacklozenge (EI \alpha') \delta \alpha = 0, x = 0 \\ \blacklozenge (\kappa GA \beta) \delta v = 0, x = L & \blacklozenge (EI \alpha') \delta \alpha = 0, x = L \end{array}$$

Okrajové podmínky musí vyhovovat jednak geometrickým podmínkám (v nebo α jsou hodnoty zadány) a také přirozeným okrajovým podmínkám ($\beta = 0$ nebo $\alpha' = 0$)

Prut konstantního průřezu (★) $\alpha' = v'' + \left(\frac{1}{\kappa GA} \right) (p - \rho A \ddot{v})$

Po derivování rovnice ★ a po dosazení rovnice ★

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \left(p - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) - \rho I \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{EI}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(p - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) - \frac{\rho I}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(p - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = 0$$

64

Volné (vlastní) kmitání spojitých soustav

- Znalost řešení vlastního kmitání spojitých soustav je důležitá z hlediska srovnání s řešením pomocí konečného počtu stupňů volnosti
- Při zavedených předpokladech lze považovat řešení na spojitých soustavách (konstrukcích) za přesné řešení.

Volné (vlastní) podélné kmitání přímého prutu

Pohybová rovnice pro podélně namáhaný prut $\frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial u}{\partial x} + p \right) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Volné kmitání podélné zatížení $p = 0$

$(AEu')' = \rho A \ddot{u}$, kde $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$ Rovnice popisuje volné podélné kmitání prutu

Předpoklad - kmitání je harmonické $u(x, t) = U(x) \cos(\omega t - \alpha)$

$$(AEU')' + \rho A \omega^2 U = 0 \quad \text{😊}$$

Řešení diferenciální rovnice - obyčejná diferenciální rovnice vyhovuje okrajovým podmínkám

Existuje řešení pro jisté hodnoty ω_r a odpovídající funkci $U_r(x)$.

Hodnoty ω_r a odpovídající funkce $U_r(x)$ jsou **vlastními hodnotami rovnice**. 😊

Předpoklad: Průřezové a materiálové charakteristiky prutu jsou konstantami
plocha průřezu $A = \text{konst}$, modul pružnosti $E = \text{konst}$. a hustota $\rho = \text{konst}$.

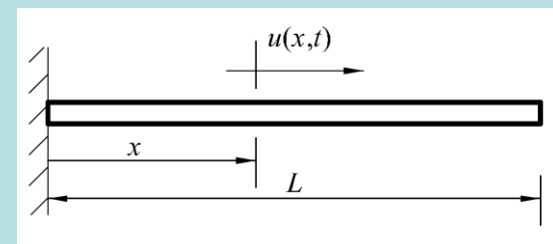
$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \left(\frac{\rho \omega^2}{E} \right) U = 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{d^2 U}{dx^2} + \lambda^2 U = 0, \text{ kde } \lambda^2 = \frac{\rho \omega^2}{E}$$

$$U(x) = A_1 \cos(\lambda x) + A_2 \sin(\lambda x)$$

Okrajové podmínky

a) neposuvný konec prutu $u(x_0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad U = 0$

b) volný konec prutu $\varepsilon_x|_{x_e} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x_e} = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dx} = 0$



Příklad: Odvoďte výrazy pro vlastní úhlovou frekvenci a pro vlastní tvary podélného vlastního kmitání nosníku konstantního průřezu

Okrajové podmínky

Levý konec pevně uchycen
Pravý konec – průřez je volný

$$U \big|_{x=0} = \frac{dU}{dx} \big|_{x=L} = 0$$

$$U(x) = A_1 \cos(\lambda x) + A_2 \sin(\lambda x) \quad U \Big|_{x=0} = A_1 = 0$$

$$\frac{dU}{dx} = -A_1 \lambda \sin(\lambda x) + A_2 \lambda \cos(\lambda x) \quad \frac{dU}{dx} \Big|_{x=L} = A_2 \lambda \cos(\lambda L) = 0$$

Triviální řešení $A_1 = A_2 = 0$ nemá smysl

Netriviální řešení

$$\cos(\lambda L) = 0$$

Charakteristická rovnice má kořeny $\lambda L = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}, \dots, \left(r - \frac{1}{2}\right)\pi, \dots$

S přihlédnutím k rovnici $\lambda^2 = \frac{\rho \omega^2}{E}$

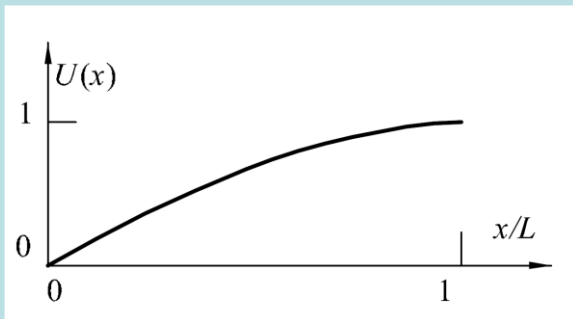
Vlastní úhlová frekvence $\omega_r = \lambda_r \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{(\lambda L)_r}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow \boxed{\omega_r = \frac{(2r - 1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$

$U_r(x) = A_2 \sin(\lambda_r x) = C \sin(\lambda_r x) \Rightarrow \boxed{U_r(x) = C \sin \left[\left(r - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L} \right]}$

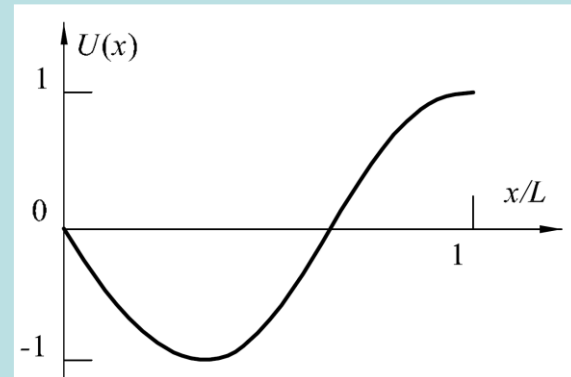
Funkce $U_r(x)$ je r -tým vlastním tvarem kmitu odpovídající úhlové frekvenci ω_r
 C je libovolný násobitel

Průběhy funkce U_1 a U_2 zobrazující první dva vlastní tvary kmitu

$$U_1(x) = C \sin \left(\frac{1}{2} \frac{\pi x}{L} \right)$$



$$U_2(x) = C \sin \left(\frac{3}{2} \frac{\pi x}{L} \right)$$



Volné (vlastní) ohybové kmitání tenkého přímého prutu

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p \quad \text{Volné kmitání - příčné zatížení } p = 0 \quad (EI v''')'' + \rho A \ddot{v} = 0$$

Řešení se hledá ve tvaru harmonické funkce $v(x, t) = V(x) \cos(\omega t - \alpha)$

$$(EIV''')'' - \rho A \omega^2 V = 0 \quad \text{Řešení uvedené rovnice v uzavřeném tvaru není možné pro proměnné koeficienty (A, E a \rho)}$$

Příčné vlastní kmitání prutu konstantního průřezu

$$\frac{d^4 V}{dx^4} - \lambda^4 V = 0, \text{ kde } \lambda^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

Diferenciální rovnice čtvrtého řádu, má obecné řešení

$$V(x) = A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3 e^{i\lambda x} + A_4 e^{-i\lambda x} \quad \text{nebo}$$

$$V(x) = B_1 e^{\lambda x} + B_2 e^{-\lambda x} + B_3 \sin(\lambda x) + B_4 \cos(\lambda x) \quad \text{nebo}$$

$$V(x) = C_1 \sinh(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x) + C_3 \sin(\lambda x) + C_4 \cos(\lambda x)$$

Uvedené rovnice obsahují čtyři integrační konstanty a vlastní číslo λ

Integrační konstanty lze určit z okrajových podmínek

$$\text{a) vetknutí} \quad v(x_e, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 0 \quad \varphi_z \big|_{x_e} = \frac{\partial v}{\partial x} \big|_{x_e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = 0$$

b) prosté podepření na konci prutu $v(x_e, t) = 0 \Rightarrow V = 0 \quad M|_{x_e} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x_e} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$

c) na volný nezatížený konec

$$M|_{x_e} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x_e} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \quad S = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x_e} = 0 \Rightarrow \frac{d^3 V}{dx^3} = 0$$

Příklad: Odvoďte výrazy pro vlastní úhlovou frekvenci a pro vlastní tvary příčného vlastního kmitání prostého nosníku konstantního průřezu

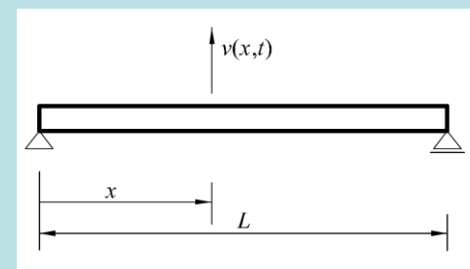
$$V(x) = C_1 \sinh(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x) + C_3 \sin(\lambda x) + C_4 \cos(\lambda x)$$

$$V(x=0) = 0, \quad \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad V(x=L) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \lambda^2 [C_1 \sinh(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x) - C_3 \sin(\lambda x) - C_4 \cos(\lambda x)]$$

OP - levý konec ($x=0$) $C_2 + C_4 = 0, \quad \lambda^2(C_2 - C_4) = 0 \Rightarrow C_2 = C_4 = 0$

OP - pravý konec ($x=L$) $C_1 \sinh(\lambda L) + C_3 \sin(\lambda L) = 0, \quad \lambda^2[C_1 \sinh(\lambda L) - C_3 \sin(\lambda L)] = 0$



$$\det = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sinh(\lambda L) & \sin(\lambda L) \\ \lambda^2 \sinh(\lambda L) & -\lambda^2 \sin(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \underbrace{-2\lambda^2 \sinh(\lambda L) \sin(\lambda L) = 0, \lambda \neq 0 \Rightarrow \sinh(\lambda L) \sin(\lambda L) = 0}_{\text{red smiley and blue smiley icons}}$$

$\sinh(\lambda L) = 0$ pouze, když $(\lambda L) = 0 \Rightarrow$ Netriviální řešení z rovnice $\sin(\lambda L) = 0$

$\sin(\lambda L) = 0$ charakteristická rovnice pro určení λ_r

Po dosazení rovnice do ☹️ nebo 😊 je zřejmé, že $C_1 = 0$

Tedy $C_1 = C_2 = C_4 = 0$ - nenulová konstanta C_3 je C

Potom $V(x) = C \sin(\lambda x)$

Rovnice platí pro různá vlastní čísla λ_r

$$\lambda_1 L = \pi, \lambda_2 L = 2\pi, \dots, \lambda_r L = r\pi \quad \lambda^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

Potom

$$\omega_r^2 = \lambda_r^4 \frac{EI}{\rho A} = \left(\frac{r\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{\rho A}$$

Nakonec

Úhlová frekvence

$$\omega_r = \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Vlastní tvar kmitu

$$V_r(x) = C \sin(\lambda_r x) = C \sin\left(\frac{r\pi}{L} x\right)$$

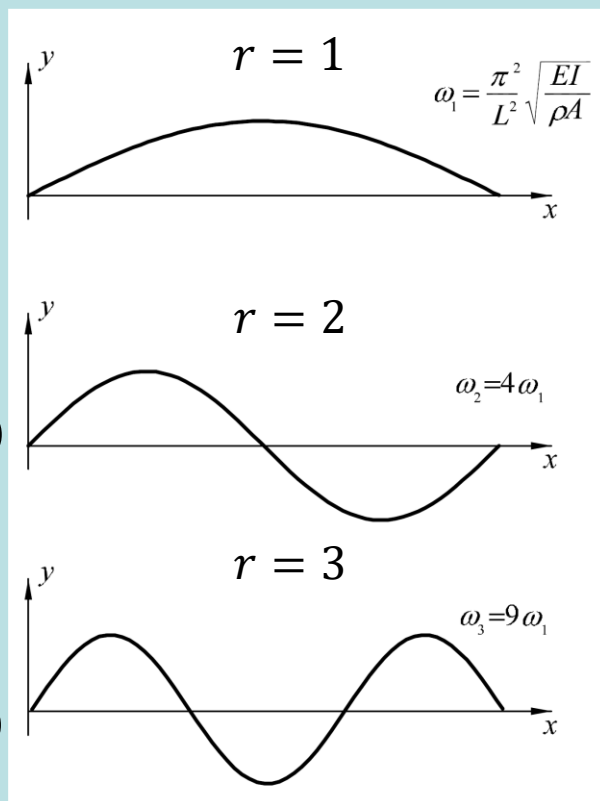
C je libovolný násobitel

$$V_1(x) = C \sin(\pi x)$$

$$V_2(x) = C \sin(2\pi x)$$

$$V_3(x) = C \sin(3\pi x)$$

První tři vlastní tvary kmitu



Příklad: Odvoďte výrazy pro vlastní úhlovou frekvenci a pro vlastní tvary příčného vlastního kmitání konzoly konstantního průřezu

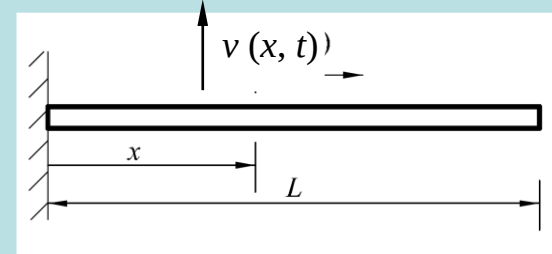
$$V(x) = C_1 \sinh(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x) + C_3 \sin(\lambda x) + C_4 \cos(\lambda x)$$

$$V(x=0) = 0, \quad \frac{dV}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{d^3V}{dx^3} \Big|_{x=L} = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = \lambda [C_1 \cosh(\lambda x) + C_2 \sinh(\lambda x) + C_3 \cos(\lambda x) - C_4 \sin(\lambda x)],$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \lambda^2 [C_1 \sinh(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x) - C_3 \sin(\lambda x) - C_4 \cos(\lambda x)] \quad \text{a}$$

$$\frac{d^3V}{dx^3} = \lambda^3 [C_1 \cosh(\lambda x) + C_2 \sinh(\lambda x) - C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)]$$



Charakteristická rovnice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ \lambda^2 \sinh(\lambda L) & \lambda^2 \cosh(\lambda L) & \lambda^2 \sin(\lambda L) & \lambda^2 \cos(\lambda L) \\ \lambda^3 \cosh(\lambda L) & \lambda^3 \sinh(\lambda L) & \lambda^3 \cos(\lambda L) & \lambda^3 \sin(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\cosh(\lambda L) \cos(\lambda L) + 1 = 0}$$

První tři vlastní úhlové frekvence

$$\boxed{\omega_r = \frac{(\lambda_r L)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 L &= 1,8751, \\ \lambda_2 L &= 4,6941, \\ \lambda_3 L &= 7,8549, \\ \lambda_4 L &= 10,996 \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \frac{3,516}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \omega_2 = \frac{22,03}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \omega_3 = \frac{61,70}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Výpočet konstant

Z prvních dvou rovnic $C_4 = -C_2$ a $C_3 = -C_1$

Třetí rovnice má tvar $C_1 \sinh(\lambda_r L) + C_2 \cosh(\lambda_r L) - C_3 \sin(\lambda_r L) - C_4 \cos(\lambda_r L) = 0$

Spojením rovnic

$$C_1 \sinh(\lambda_r L) + C_2 \cosh(\lambda_r L) + C_1 \sin(\lambda_r L) + C_2 \cos(\lambda_r L) = 0$$

Potom
$$C_1 = -C_2 \left[\frac{\cosh(\lambda_r L) + \cos(\lambda_r L)}{\sinh(\lambda_r L) + \sin(\lambda_r L)} \right] = -k_r C_2$$

Funkce popisující tvar r -tého kmitu

$$V_r(x) = C [\cosh(\lambda_r x) - \cos(\lambda_r x)] - k_r [\sinh(\lambda_r x) - \sin(\lambda_r x)]$$

kde
$$k_r = \left[\frac{\cosh(\lambda_r L) + \cos(\lambda_r L)}{\sinh(\lambda_r L) + \sin(\lambda_r L)} \right]$$

$$\omega_1 = \frac{3,516}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$



První vlastní tvar kmitu

$$V_1(x) = C f_1(x)$$

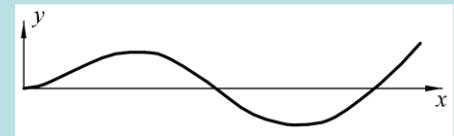
$$\omega_2 = \frac{22,03}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$



Druhý vlastní tvar kmitu

$$V_2(x) = C f_2(x)$$

$$\omega_3 = \frac{61,70}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$



Třetí vlastní tvar kmitu

$$V_3(x) = C f_3(x)$$

Některé vlastnosti vlastních tvarů kmitu

Spojitá soustava má **nekonečně mnoho vlastních dvojic**

Vlastní dvojice - vlastní úhlová frekvence ω_r (resp. frekvence f_r) a vlastní tvar kmitu V_r

A Spektrum vlastních úhlových frekvencí (frekvencí)

Z praktického hlediska je nutno mít množinu frekvencí uspořádanou vzestupně

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_r \leq \dots \omega_\infty \quad \text{popřípadě} \quad f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_r \leq \dots f_\infty$$

Frekvence odpovídají vlastním tvarům kmitu $V_1, V_2, \dots, V_r, \dots, V_\infty$

Poznámky:

- ☞ Oblasti zájmu frekvence a vlastní tvary kmitu do 500 Hz
- ☞ Jsou-li hodnoty frekvencí od sebe významně vzdáleny potom spektrum je řídké
- ☞ Husté spektrum - hodnoty dvou následujících frekvencí se liší méně než o 10 %
- ☞ Skupiny blízkých frekvencí se nazývají shluky (clustery) frekvencí – frekvence mohou mít stejnou nebo blízkou hodnotu

B Normování vlastních tvarů kmitu

Způsob úpravy amplitudy tvaru kmitu se nazývá normováním a takto upravené tvary se nazývají **normované vlastní tvary kmitu**

$V_r(x) = C_r \phi_r(x)$, kde C_r je násobitel nesoucí rozměr a $\phi_r(x)$ je bezrozměrná funkce

Způsob úpravy měřítka funkce V_r se nazývá normování

Základní typy normování:

1. V určitém místě funkce $\phi_r(x_s) = 1$
2. Tam, kde funkce ϕ_r dosahuje absolutní maximum $|\phi_r(x)| = 1$
3. Normování vzhledem k hmotnosti, tak že **modální hmotnost** má určitou velikost – nejvýhodnější případ $M_r = 1$.

$$M_r = \int_0^L \rho A \phi_r^2 dx \quad \text{⌘}$$

Způsob úpravy amplitudy tvaru kmitu se nazývá **normováním** a takto upravené tvary se nazývají **normované vlastní tvary kmitu**

Příklad: Tenký ohýbaný prut - **modální tuhost** pro r -tý vlastní tvar kmitu

$$K_r = \int_0^L EI(\phi_r'')^2 dx \quad \text{⌘}$$

Rovnice popisující vlastní kmitání tenkého ohýbaného prutu $(EI\phi_r'')'' - \rho A\omega_r^2\phi_r = 0$

Po vynásobení rovnice násobitelem ϕ_r a integrací v oblasti od 0 do L

$$\int_0^L (EI\phi_r'')'' \phi_r dx - \omega_r^2 \int_0^L \rho A \phi_r^2 dx = 0$$
$$(EI\phi_r'')' \phi_r \Big|_0^L - (EI\phi_r'') \phi_r' \Big|_0^L + \int_0^L EI(\phi_r'')^2 dx - \omega_r^2 \int_0^L \rho A \phi_r^2 dx = 0 \quad \text{\#}$$

Okrajové podmínky $(EI\phi'')' \delta\phi = 0, x = 0$ $(EI\phi'') \delta\phi' = 0, x = 0$
 $(EI\phi'') \delta\phi' = 0, x = L$ $(EI\phi'')' \delta\phi = 0, x = L$

S přihlédnutím k okrajovým podmínkám - první dva členy v rovnici **\#** jsou rovny nule

$$\int_0^L EI(\phi_r'')^2 dx - \omega_r^2 \int_0^L \rho A \phi_r^2 dx = 0 \quad (\text{⌘}, \text{⌘}) \quad \Rightarrow$$

$$\omega_r^2 = \frac{K_r}{M_r}$$

Analogie se soustavou s 1SV

C Ortogonalita vlastních tvarů kmitu

Ortogonalita vlastních tvarů kmitu je nejdůležitější vlastností vlastních tvarů

$$(EI\phi_r'')'' - \rho A\omega_r^2\phi_r = 0 \quad \times \quad \phi_s \quad \blacktriangle \quad (\phi_s \neq \phi_r) \quad \text{a integrace v oblasti od 0 do } L$$

$$\int_0^L EI\phi_r''\phi_s'' dx - \omega_r^2 \int_0^L \rho A\phi_r\phi_s dx = 0$$

$$(EI\phi_s'')'' - \rho A\omega_s^2\phi_s = 0 \quad \times \quad \phi_r \quad \blacktriangledown \quad (\phi_r \neq \phi_s) \quad \text{a integrace v oblasti od 0 do } L$$

$$\int_0^L EI\phi_s''\phi_r'' dx - \omega_s^2 \int_0^L \rho A\phi_s\phi_r dx = 0$$

Po odečtení rovnice $\blacktriangledown$ od rovnice $\blacktriangle$ $(\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L \rho A\phi_r\phi_s dx = 0$

Úhlové frekvence jsou různé - potom pro dva vlastní tvary musí platit

$$\int_0^L \rho A\phi_r\phi_s dx = 0, \quad \text{🎵 } \omega_r \neq \omega_s \quad \text{tvary jsou ortogonální vzhledem k hmotnosti}$$

Rovnice vyjadřuje „ortogonalitu“ vlastních tvarů

Po dosazení 🎵 do $\blacktriangle$ nebo $\blacktriangledown$

$$\int_0^L EI\phi_s''\phi_s'' dx = 0 \quad \text{tvary jsou také ortogonální vzhledem k tuhosti}$$

Tvary, kdy $M_r = 1$ (normování na hmotnost) $M_r = \int_0^L \rho A\phi_r^2 dx = 1$ Normované tvary se nazývají **ortonormální**

D Teorém o rozkladu

Libovolnou funkci $V(x)$, která vyhovuje stejným okrajovým podmínkám jako množina ortonormálních tvarů ϕ_r , ($r = 1, 2, \dots$) a za podmínky, že $d^2/dx^2 (EI d^2v/dx^2)$ je spojitou funkcí, lze vyjádřit pomocí absolutně monotónně konvergentní řady

$$V(x) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r \phi_r(x), \quad \star \quad \text{kde} \quad c_r = \frac{\int_0^L \rho A V \phi_r dx}{\int_0^L \rho A \phi_r^2 dx} \quad \text{s uvážením normování} \quad c_r = \int_0^L \rho A V \phi_r dx$$

E Rayleighův podíl (kvocient)

Nechť funkce $V(x)$ vyhovuje okrajovým podmínkám a požadovaným spojitostem, potom

$$R(V) = \frac{k}{m} = \frac{\int_0^L EI (V'')^2 dx}{\int_0^L \rho A V^2 dx} \quad \star \quad R(V) = \omega_r^2, \text{ když } V = c_r \phi_r(x)$$



John William Strutt
(Lord Rayleigh)

Nobelova cena za fyziku 1904

Po dosazení $\star$ do $\star$

$$R(V) = \frac{c_1^2 \omega_1^2 + c_2^2 \omega_2^2 + c_3^2 \omega_3^2 + \dots}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \dots}$$

$$R(V) = \omega_1^2 \left[\frac{1 + (c_2/c_1)^2 (\omega_2/\omega_1)^2 + (c_3/c_1)^2 (\omega_3/\omega_1)^2 + \dots}{1 + (c_2/c_1)^2 + (c_3/c_1)^2 + \dots} \right]$$

Čitatel je větší nebo roven jmenovateli (ω_{r+1}/ω_r)

$$R(V) \geq \omega_1^2$$

Rayleighův podíl (kvocient) slouží k odhadu úhlové frekvence

Vlastní kmitání tenkých desek

Desky jsou tělesa, kdy pro popis vystačíme s funkcí v závislosti na dvou souřadnicích – 2D úloha

Pohybová rovnice volného kmitání tenké desky - Kirchhoffova teorie desek

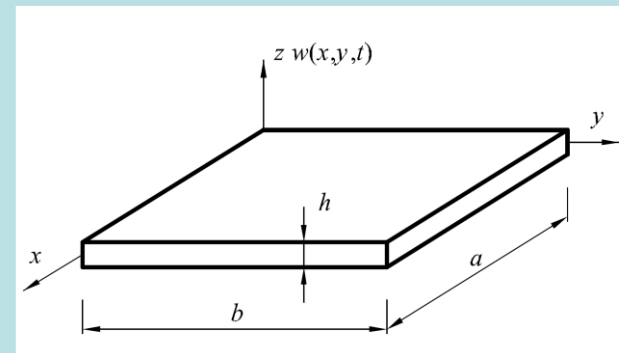
$$D\nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = 0$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{- ohybová tuhost desky}$$

$$h \quad \text{- tloušťka desky}$$

$$w(x, y, t) \quad \text{- průhyb (příčné posunutí střednice)}$$

$$\nabla^4(\cdot) = (\cdot)_{xxxx} + 2(\cdot)_{xxyy} + (\cdot)_{yyyy} \quad \text{- biharmonický operátor}$$



Obdélníková deska

Lze zapsat zobecněné okrajové podmínky pro okraj $y = \text{konst}$

$$[w_{yy} + \nu w_{xx}]\delta w = 0 \text{ a } [w_{yyy} + (2 - \nu)w_{xxy}]\delta w = 0$$

Analogicky podmínky pro okraj $x = \text{konst}$ (záměna indexů x a y)

$$[w_{xx} + \nu w_{yy}]\delta w = 0 \text{ a } [w_{xxx} + (2 - \nu)w_{xyy}]\delta w = 0$$

Prostě podepřená obdélníková deska okrajové podmínky

$$w(0, y) = w(a, y) = w(x, 0) = w(x, b) = 0,$$

$$w_{xx}(0, y) = w_{xx}(a, y) = w_{yy}(x, 0) = w_{yy}(x, b) = 0$$

Předpokládá se, že při volném kmitání desky koná deska harmonický pohyb

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cos(\omega t - \alpha) \longrightarrow D \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = 0$$

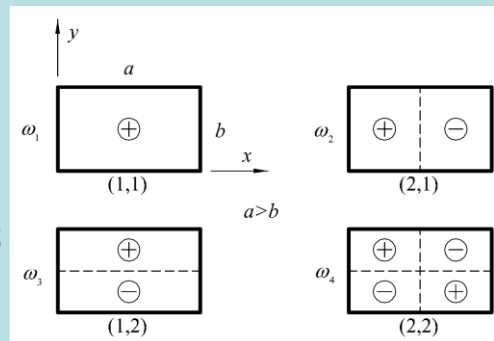
Rovnice pro výpočet vlastních hodnot

$$\nabla^4 W - \lambda^4 W = 0 \quad \lambda^4 = \frac{\omega^2 \rho h}{D}$$

Funkce vyhovující okrajovým podmínkám

$$W_{(m,n)}(x, y) = C \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\lambda_{(m,n)}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$



$$\omega_{(m,n)} = \sqrt{\frac{\pi^4 D}{\rho h a^4} \left[m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]}$$

nebo

$$\omega_{(m,n)} = \sqrt{\frac{\pi^4 D}{\rho h b^4} \left[m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2 \right]}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{1,1} \\ \omega_2 &= \omega_{2,1} \\ \omega_3 &= \omega_{1,2} \\ \omega_4 &= \omega_{2,2} \end{aligned}$$

Parametry (m, n) popisují tvar kmitu

Prostě podepřená čtvercová deska $a = b$

Objevuje se (dvou) násobnost vlastních hodnot $\omega_{(m,n)} = \omega_{(n,m)}$,

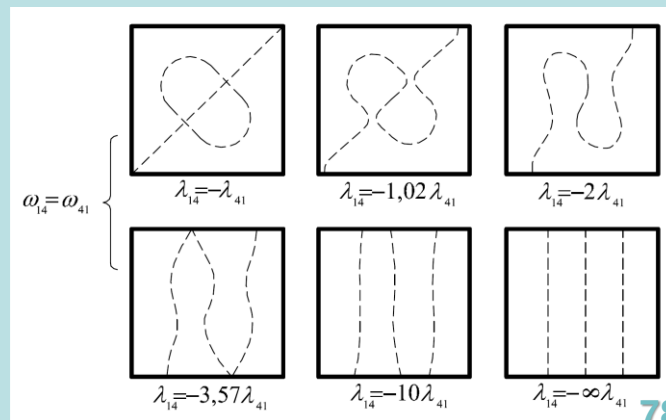
např. $\omega_{1,2} = \omega_{2,1} = \omega_1 = \omega_2$

Vlastním číslům $\lambda(m, n) = \lambda(n, m)$ odpovídají vzájemně různé vlastní tvary $W(m, n)$ a $W(n, m)$

Potom libovolná lineární kombinace $W_{(m,n)} + cW_{(n,m)}$ vyhovuje rovnici $\nabla^4 W - \lambda^4 W = 0$

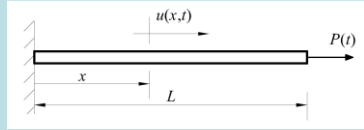
Dva různé tvary definují dvourozměrný podprostor

vlastních tvarů $W = A_{(m,n)}W_{(m,n)} + A_{(n,m)}W_{(n,m)}$



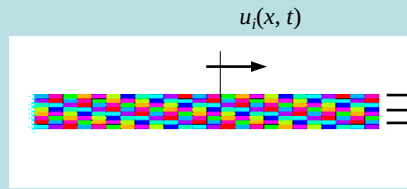
Modely soustav s konečným počtem stupňů volnosti

Podélné kmitání prutu

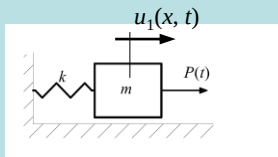


Model s ∞ množstvím stupňů volnosti

Řešení lze nalézt ve speciálních případech (pruty, deska)

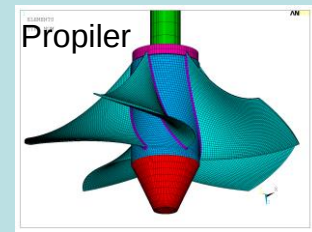


Model s konečným počtem stupňů volnosti (216 SV)



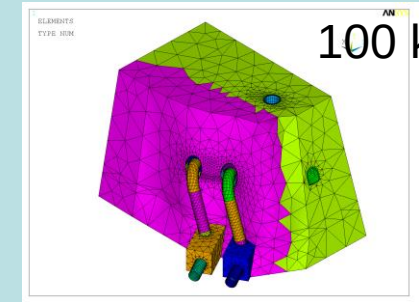
Model s jedním stupněm volnosti

Řešení nepřesně vystihuje chování složité soustavy



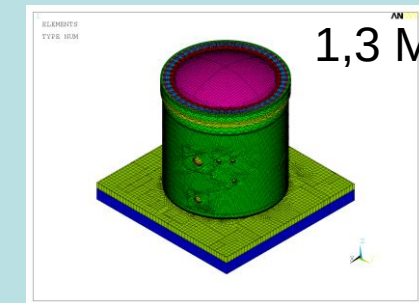
11

300 k SV



100 k SV

Přívaděč VE Matka, Makedonie

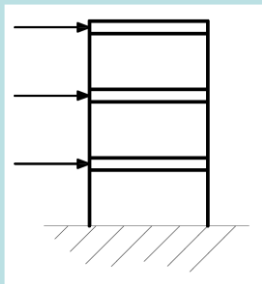


1,3 M SV

Kontejment JE Temelín

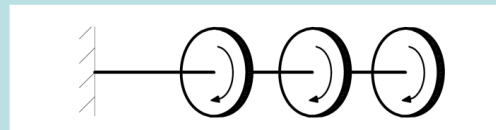
Modely se soustředěnou hmotou

Tří podlažní objekt



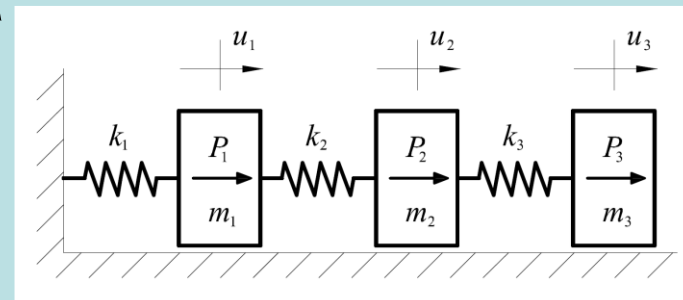
3 SV - hmotné

Tří rotujících disky



3 SV - hmotné

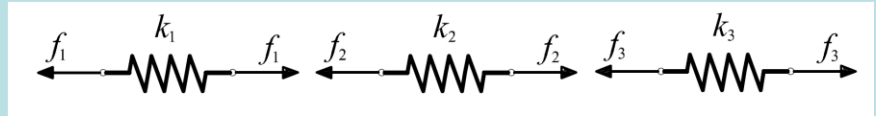
Posuvy, rotace jsou nezávislé parametry



Příklad: Sestavte pohybové rovnice netlumené soustavy se třemi stupni volnosti
 Pro řešení použijte 2. Newtonův zákon

Řešení:

$$\begin{aligned} + \sum_{\rightarrow} F_1 &= m_1 \ddot{u}_1 = P_1 + f_2 - f_1 \\ + \sum_{\rightarrow} F_2 &= m_2 \ddot{u}_2 = P_2 + f_3 - f_2 \\ + \sum_{\rightarrow} F_3 &= m_3 \ddot{u}_3 = P_3 - f_3 \end{aligned}$$



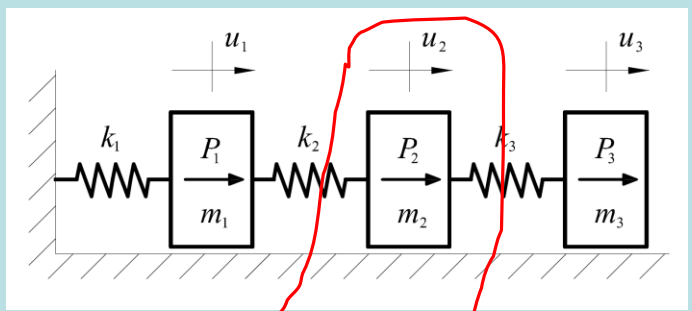
$$\begin{aligned} f_1 &= k_1 e_1 = k_1 u_1 \\ f_2 &= k_2 e_2 = k_2 (u_2 - u_1) \\ f_3 &= k_3 e_3 = k_3 (u_3 - u_2) \end{aligned}$$

Pohybové rovnice netlumené soustavy

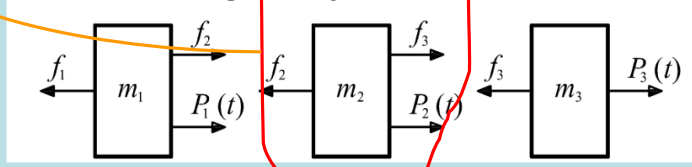
$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 &= P_1(t) \\ m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3) u_2 - k_3 u_3 &= P_2(t) \\ m_3 \ddot{u}_3 - k_3 u_2 + k_3 u_3 &= P_3(t) \end{aligned}$$

Rovnice se dají zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$



Silové diagramy



$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

- m** je matice hmotností
- k** je matice tuhostí
- u** je vektor přemístění
- ü** je vektor zrychlení
- p(t)** je vektor zatížení

Soustava rovnic je zapsána v **absolutních** přemístěních u_1, u_2, u_3

- V případě rotačního pohybu
- m** hmotné momenty setrvačnosti
- k** torzní tuhosti
- u** pootočení
- p(t)** kroutící momenty

Příklad: Sestavte pohybové rovnice – řešení vyjádřete v posunutích relativně vůči pohybu základu
K odvození použijte 2. Newtonův zákon

Řešení:

Relativní posunutí

$$w_1 = u_1 - z$$

$$w_2 = u_2 - z$$

$$+\sum_{\rightarrow} F_1 = m_1 \ddot{u}_1 = -f_1 - f_2 + f_3 + f_4 = m_1 (\ddot{w}_1 + \ddot{z})$$

$$+\sum_{\rightarrow} F_2 = m_2 \ddot{u}_2 = -f_3 - f_4 = m_2 (\ddot{w}_2 + \ddot{z})$$

Síly v pružinách a tlumící síly

$$f_1 = k_1(u_1 - z) = k_1 w_1 \quad f_3 = k_2(u_2 - u_1) = k_2(w_2 - w_1)$$

$$f_2 = c_1(\dot{u}_1 - \dot{z}) = c_1 \dot{w}_1 \quad f_4 = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = c_2(\dot{w}_2 - \dot{w}_1)$$

Pohybové rovnice tlumené soustavy v relativních posunutích

$$m_1 \ddot{w}_1 + c_1 \dot{w}_1 + k_1 w_1 - c_2(\dot{w}_2 - \dot{w}_1) - k_2(w_2 - w_1) = -m_1 \ddot{z}$$

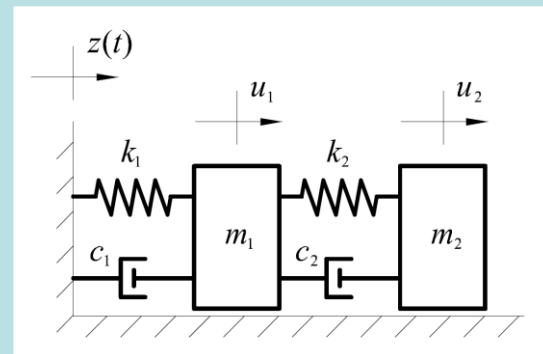
$$m_2 \ddot{w}_2 + c_2(\dot{w}_2 - \dot{w}_1) + k_2(w_2 - w_1) = -m_2 \ddot{z}$$

Maticový zápis

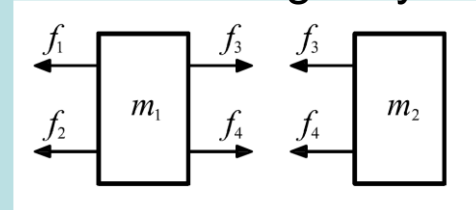
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1 \ddot{z} \\ -m_2 \ddot{z} \end{Bmatrix}$$

Obecný zápis

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{k}\mathbf{w} = \mathbf{p}_{eff}$$



Silové diagramy



Soustava rovnic je závislá – nenulové mimodiagonální prvky matice tuhosti a útlumu

Příklad: Model popisuje budovu pod vlivem seizmického zatížení
 Proved'te odvození pohybových rovnic při využití Newtonova zákona

Předpoklady: Úhel θ je malý, hmotnost základu m je soustředěna do těžiště

Řešení: $\rightarrow \sum F_x = m\ddot{u} = -2f_1 - 2f_2 + f_3$ **1**

$$\rightarrow \sum F_x = M\ddot{x}_G = -f_3$$

$$-f_3 = M(\ddot{u} + a\ddot{\theta})$$

$$+\uparrow \sum F_y = M\ddot{y}_G = f_4 - Mg$$

$$f_4 = Mg$$

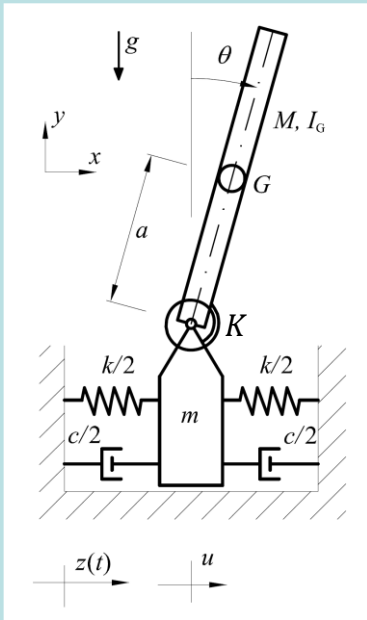
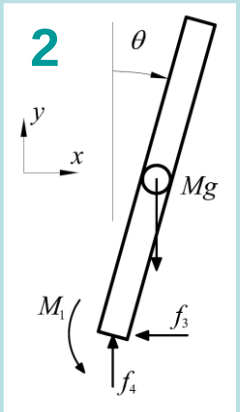
$$\curvearrowright \sum M_G = I_G\ddot{\theta} = -M_1 + f_4a \sin \theta + f_3a \cos \theta$$

Rovnice odpovídá u

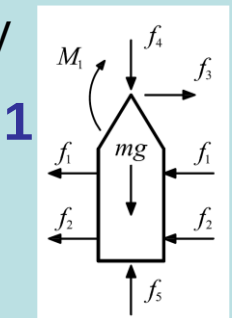
Rovnice odpovídá x_G

Rovnice odpovídá y_G

Rovnice odpovídá θ



Silové diagramy



Relativní síly $f_1 = \frac{k}{2}(u - z), f_2 = \frac{c}{2}(\dot{u} - \dot{z})$ a $M_1 = K\theta$

Vzájemná vazba mezi x_G, y_G a u, θ je dána kinematickými vztahy

Pro malý úhel θ platí $\sin \theta \cong \theta$ a $\cos \theta \cong 1$, potom

$$x_G = f(u, \theta)$$

$$y_G = f(u, \theta)$$

$$x_G = u + a \sin \theta \cong u + a\theta$$

$$y_G = a \cos \theta \cong a$$

$$\ddot{x}_G = \ddot{u} + a\ddot{\theta}$$

$$\ddot{y}_G = 0$$

Soustava rovnic je závislá – nenulové prvky matice hmotnosti

Pohybové rovnice v maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} (M + m) & Ma \\ Ma & (I_G + Ma^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & (K - Mga) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c\dot{z} + kz \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}_{eff}$$

Rovnice odpovídá u

Rovnice odpovídá θ

Lagrangeovy rovnice druhého druhu

- ➔ Použití Newtonova zákona není vždy výhodné pro odvození pohybových rovnic, protože je třeba separovat každou část, a interaktivní síly je nutno eliminovat s cílem získat hledané rovnice
- ➔ Jednodušší odvození pohybových rovnic je možné aplikací Lagrangeových rovnic využívajících k popisu skalárních veličin (práce a energie) místo vektorových (síly a přemístění)

Lagrangeovy rovnice se vyjadřují pomocí zobecněných souřadnic

Jedná se o množinu N **nezávislých hodnot** q_i , $i = \overline{1, N}$ dostatečných pro určení polohy každého bodu soustavy (v předešlém příkladu, to byly u, θ , tj. q_1, q_2).

Lagrangeovy rovnice budou odvozeny z Hamiltonova principu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0$$

Kinetická energie T je funkcí q_i a $\dot{q}_i$

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$$

Potenciální energie V je funkcí q_i

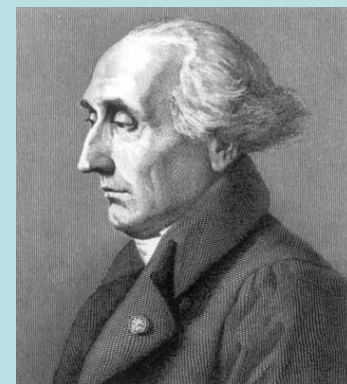
$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_N, t)$$

Virtuální práce nekonzervativních sil

$$\delta W_{nc} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N,$$

kde $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ jsou zobecněné síly

s takovým rozměrem, aby součin $Q_i \delta q_i$ měl rozměr práce



Joseph-Louis Lagrange, comte de l'Empire
(25. ledna 1736 – 10. dubna 1813; narozen v Turíně,
pokřtěn jako Giuseppe Lodovico Lagrangia)
italsko-francouzský matematik a astronom
Významně rozvinul matematickou analýzu, teorii čísel,
klasickou a nebeskou mechaniku.
Je zakladatelem oblasti matematiky
nazývané variační počet
Byl jedním z největších matematiků 18. století

Příklad: Najděte výraz pro kinetickou energii pomocí členů q_1 a q_2
Hmotnost m se posouvá po nehmotné tyči

Řešení:

Kinetická energie systému $T = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

Z kinematiky lze odvodit $y = q_1 \cos q_2$ a $z = q_1 \sin q_2$

Derivací kinematických vztahů

$$\dot{y} = \dot{q}_1 \cos q_2 - q_1 \dot{q}_2 \sin q_2 \quad \text{a} \quad \dot{z} = \dot{q}_1 \sin q_2 + q_1 \dot{q}_2 \cos q_2$$

Po dosazení do T získáme

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2)$$

Příklad: Určete výraz pro potenciální energii částice tíhy W a virtuální práci síly P

Řešení: Nechť potenciální energie je rovna nule v poloze $\theta = \pi/2$,

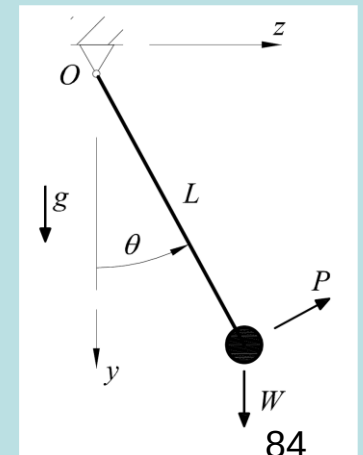
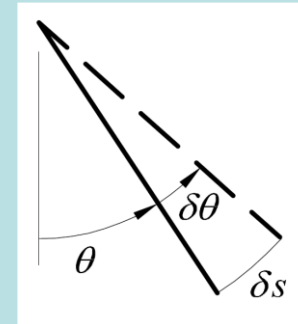
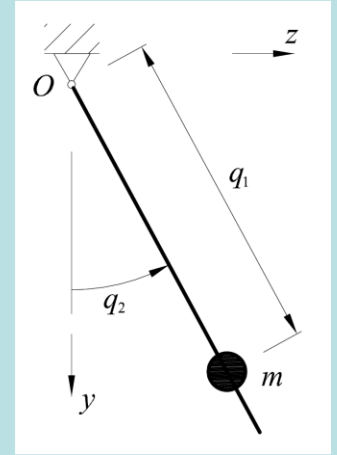
potom $V = -Wy = -WL \cos \theta$

$\delta s = L\delta\theta$ je dráha, po které se přemístí síla P

Virtuální práce síly P

$$\delta W_p = P\delta s = (PL)\delta\theta$$

Zobecněná síla $Q_\theta = PL$



Dosadíme do výrazu pro Hamiltonův princip výrazy pro energie a virtuální práci nek. sil

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_N} \delta q_N + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_N} \delta \dot{q}_N - \right. \\ \left. - \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 - \dots - \frac{\partial V}{\partial q_N} \delta q_N + Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N \right) dt = 0 \quad \star$$

Členy obsahující $\delta \dot{q}_i$ integrujeme per partes $\star \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$

Člen ve hranatých závorkách je roven nule, protože $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, výchozí podmínka Hamiltonova principu. Potom rovnice $\star$ se dá přepsat

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_N} \delta q_N - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \delta q_1 - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \delta q_2 + \dots - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_N} \delta q_N - \right. \\ \left. - \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 - \dots - \frac{\partial V}{\partial q_N} \delta q_N + Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N \right) dt = 0$$

Integrál rozdělíme podle proměnných na N částí. Za předpokladu, že variace $\delta q_i (i = \overline{1, N})$ je nenulová, musí členy s jednotlivými nezávislými proměnnými v součtu dát nulu. Získáme takto N rovnic

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, N}$$

Lagrangeovy rovnice

Příklad: Model popisuje pohyb budovy při buzení seismickým zatížením
Úhel θ je malý a hmotnost základu m je soustředěna do těžiště
Sestavte pohybové rovnice s využití Lagrangeho rovnic

Řešení: 2SV s nezávislými zobecněnými souřadnicemi

$$q_1 \rightarrow u \quad \text{a} \quad q_2 \rightarrow \theta$$

Výrazy pro T , V a dW_{nc}

$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2$$

Z kinematiky $x_G = u + a \sin \theta$ a $y_G = a \cos \theta$

Pro malé hodnoty úhlu θ , $\sin \theta \cong \theta$ a $\cos \theta \cong 1 - \frac{1}{2} \theta^2$

Potom $\dot{x}_G = \dot{u} + a \dot{\theta}$ a $\dot{y}_G \cong 0$ (nelineární člen $\theta \dot{\theta}$ a byl zanedbán)

Po dosazení do výrazu pro kinetickou energii

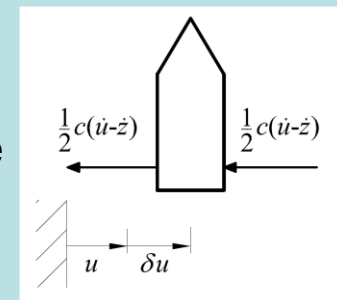
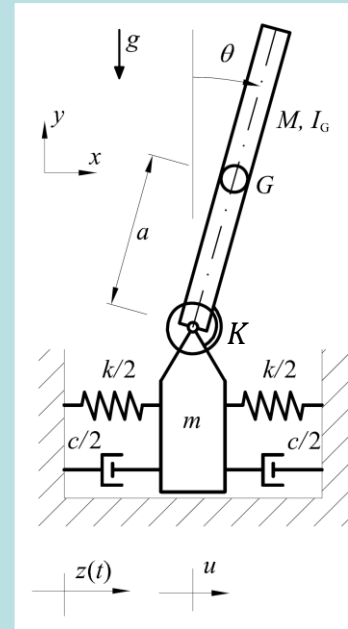
$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{u} + a \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2$$

Potenciální energie deformace v pružině a gravitační potenciální energie

$$V = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} \right) (u - z)^2 \right] + \frac{1}{2} K \theta^2 + M g a \cos \theta$$

Pro malé hodnoty úhlu θ

$$V = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} \right) (u - z)^2 \right] + \frac{1}{2} K \theta^2 + M g a \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right)$$



Nekonzervativní (tlumicí) síly

$$\delta W_{nc} = -2 \left[\frac{1}{2} c (\dot{u} - \dot{z}) \right] \delta u$$

Aplikace Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2$$

$$q_1 \leftarrow u$$

$$q_2 \leftarrow \theta$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} &= m\dot{u} + M(\dot{u} + a\dot{\theta}) \quad \text{a} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = Ma(\dot{u} + a\dot{\theta}) + I_G \dot{\theta} \\ \frac{\partial T}{\partial u} &= \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \right\} \Leftarrow T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{u} + a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = k(u - z) \quad \text{a} \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = K\theta - Mga\theta \quad \Leftarrow V = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} \right) (u - z)^2 \right] + \frac{1}{2} K \theta^2 + Mga \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right)$$

$$Q_u = -c(\dot{u} - \dot{z}) \quad \text{a} \quad Q_\theta = 0 \quad \Leftarrow \delta W_{nc} = -2 \left[\frac{1}{2} c (\dot{u} - \dot{z}) \right] \delta u$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) = m\ddot{u} + M(\ddot{u} + a\ddot{\theta}) \quad \text{a} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = Ma(\ddot{u} + a\ddot{\theta}) + I_G \ddot{\theta}$$

$$(M + m)\ddot{u} + Ma\ddot{\theta} + k(u - z) = -c(\dot{u} - \dot{z})$$

$$Ma\ddot{u} + (Ma^2 + I_G)\ddot{\theta} + (K - Mga)\theta = 0$$

Pohybové rovnice se shodují s řešením při použití Newtonova zákona

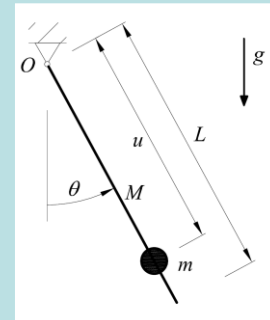
$$\begin{bmatrix} (M + m) & Ma \\ Ma & (I_G + Ma^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & (K - Mga) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c\dot{z} + kz \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Příklad: Odvoďte pohybové rovnice pro případ pohybující se hmoty m po tenké tyči o délce L a hmotnosti M

Pro odvození použijte Lagrangeovy rovnice.

Řešení: Výrazy pro T a V

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ML^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{u}^2 + u^2 \dot{\theta}^2) \quad \text{a} \quad V = - \left[Mg \left(\frac{L}{2} \right) + mgu \right] \cos \theta$$



Aplikace Lagrangeových rovnic

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = m\dot{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} ML^2 \dot{\theta} + mu^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = mu\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = -mg \cos \theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \left[Mg \left(\frac{L}{2} \right) + mgu \right] \sin \theta$$

$$Q_u = Q_\theta = 0$$

Dále $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) = m\ddot{u}$ a $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{3} ML^2 \ddot{\theta} + 2mu\dot{u}\dot{\theta} + mu^2 \ddot{\theta}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial u} = Q_u$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$m\ddot{u} - mu\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta = 0$$

$$\left(\frac{1}{3} ML^2 + mu^2 \right) \ddot{\theta} + 2mu\dot{u}\dot{\theta} + \left[Mg \left(\frac{L}{2} \right) + mgu \right] \sin \theta = 0$$

Soustava rovnic
je silně nelineární

Použití Lagrangeových rovnic u spojitých modelů

Metoda přípustných funkcí

Posunutí průřezu lze vyjádřit (aproximovat) pomocí funkce $u(x, t) = \psi(x) \underline{u}(t)$

V tomto případě získáme jednostupňovou soustavu

Při vytváření spojitého modelu s N stupni volnosti pracujeme s N **nezávislými** funkcemi

$$\text{Potom } u(x, t) = \sum_{i=1}^N \psi_i(x) \underline{u}_i(t)$$

Funkce $\psi_i(x)$ musí mít derivace do řádu derivací, které se objevují ve výrazu pro potenciální energii deformace a vyhovovat kinematickým okrajovým podmínkám tj. musí patřit do třídy přípustných funkcí.

Požadavky obdobné jako v metodě konečných prvků (MKP)

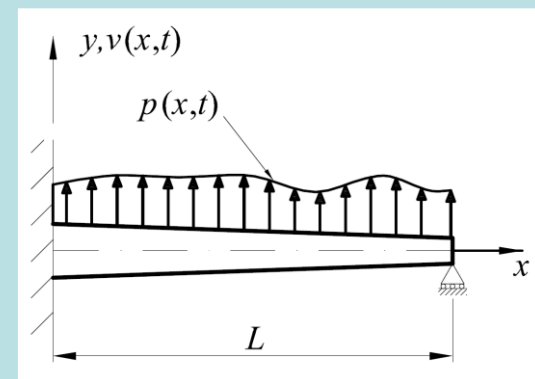
Například pro příčné kmitání nosníku

$$v(0, t) = v'(0, t) = v(L, t) = 0 \implies \psi_i(0) = \psi'_i(0) = \psi_i(L) = 0$$

Přirozené okrajové podmínky (např. $M(L, t)$) jsou splněny automaticky

Okrajové podmínky musí být splněny pro všechna t

Výraz pro energii deformace ohýbaného Bernoulliho-Eulerova prutu obsahuje $v''(x, t)$. Tedy každá funkce $\psi_i(x)$ musí být spojitou funkcí v oblasti x , a první derivace těchto funkcí podle x musí být spojitými funkcemi – nosník nemá nespojitost v průhybu a pootočení průřezu.



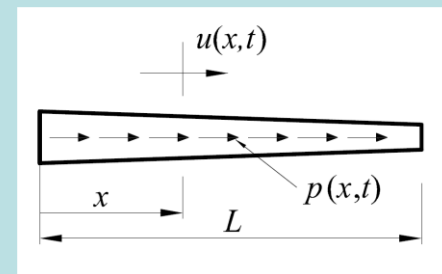
Příklad: Využití metody přípustných funkcí v případě podélného kmitání prutu

Řešení: Energie deformace prutu Kinetická energie prutu

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA(u')^2 dx$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(\dot{u})^2 dx$$

E - modul pružnosti, A - plocha průřezu, ρ - hustota materiálu



Po dosazení $u(x,t) = \sum_{i=1}^N \psi_i(x) \underline{u}_i(t)$ do výrazu pro energii deformace

$$\spadesuit \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_{ij} \underline{u}_i \underline{u}_j, \text{ kde } k_{ij} = \int_0^L EA \psi'_i \psi'_j dx \quad \spadesuit$$

V je kvadratická funkce zobecněných souřadnic s koeficienty k_{ij}

Maticový zápis rovnice $\spadesuit$

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \dots \\ \underline{u}_N \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{u}$ vektor hledaných parametrů, $\mathbf{k}$ matice tuhostí

Obdobně pro kinetickou energii

$$\clubsuit \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N m_{ij} \dot{\underline{u}}_i \dot{\underline{u}}_j, \text{ kde } m_{ij} = \int_0^L \rho A \psi_i \psi_j dx \quad \clubsuit$$

Maticový zápis rovnice ♣

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}$$

$\dot{\mathbf{u}}$ vektor rychlostí parametrů,

$\mathbf{m}$ (konzistentní) matice hmotností

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dots \\ \dot{u}_N \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix}$$



Virtuální práce spojitého zatížení působícího na prut

$$\delta w = \int_0^L p(x, t) \delta u(x, t) dx = \sum_{i=1}^N \underline{p}_i \delta \underline{u}_i$$

Z výchozí rovnice, při $\delta u(x, t) = \sum_{i=1}^N \psi_i \delta \underline{u}_i$

$$\underline{p}_i(t) = \int_0^L p(x, t) \psi_i(x) dx$$



Poznámka: V případě, že členy Matice hmotnosti jsou určeny podle vztahu ♣, potom se tato matice nazývá **konzistentní matice hmotností**

- je sestavena na stejných funkcích jako matice tuhosti

S využitím Lagrangeho rovnic získáme N pohybových rovnic

$$\sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{u}_j + \sum_{j=1}^N k_{ij} u_j = \underline{p}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

V maticovém tvaru

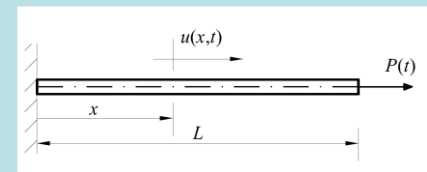
$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{p}$$



Postup pro získání pohybových rovnic

1. výběr množiny N přípustných funkcí $\psi_i(x)$
2. výpočet koeficientů matice tuhosti (rov. ♠)
3. výpočet koeficientů matice hmotnosti (rov. ♣)
4. výpočet zobecněných sil (rov. ♥)
5. sestavení výsledných rovnic (rov. ♦)

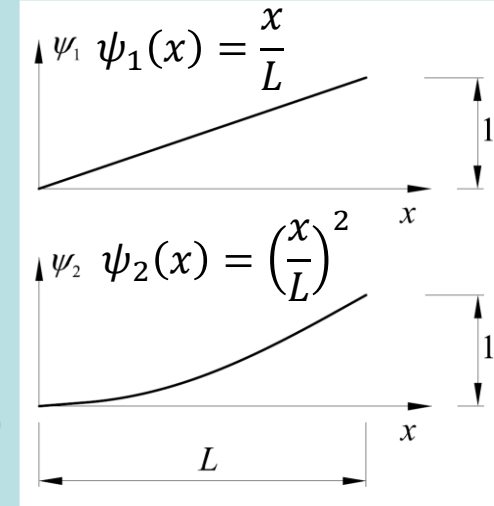
Příklad: Použijte metodu přípustných funkcí pro aproximaci funkce posunutí $u(x, t)$, s cílem získat dvoustupňový model podélného kmitání konzoly zatížené silou $P(t)$. (Aproximujte pomocí polynomů)



Řešení:

1. výběr funkcí $\psi_i(x)$ - funkce musí vyhovovat okrajové podmínce $u(0, t) = 0 \implies \psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$

Nechť $\psi_1(x) = \frac{x}{L}$ a $\psi_2(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2$



2. výpočet koeficientů k_{ij}

- je třeba určit derivace tvarových funkcí $\psi'_1 = \frac{1}{L}$ a $\psi'_2 = \left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{x}{L}\right)$

$$k_{11} = \int_0^L EA(\psi'_1)^2 dx = \frac{EA}{L}, \quad k_{12} = k_{21} = \frac{EA}{L} \quad \text{a} \quad k_{22} = \frac{4}{3} \frac{EA}{L}$$

3. výpočet koeficientů m_{ij}

$$m_{11} = \int_0^L \rho A(\psi_1)^2 dx = \frac{\rho AL}{3}, \quad m_{12} = m_{21} = \frac{\rho AL}{4} \quad \text{a} \quad m_{22} = \frac{\rho AL}{5}$$

4. výpočet zobecněných sil $\underline{p}_i$ - virtuální práce zatížení

$$\left. \begin{aligned} \delta W &= P(t)\delta u(L, t) = \underline{p}_1 \delta \underline{u}_1 + \underline{p}_2 \delta \underline{u}_2 \\ \delta u(L, t) &= \psi_1(L)\delta \underline{u}_1 + \psi_2(L)\delta \underline{u}_2 \end{aligned} \right\} \underline{p}_1 = P(t) \underbrace{\psi_1(L)}_1 = P(t) \quad \text{a} \quad \underline{p}_2 = P(t) \underbrace{\psi_2(L)}_1 = P(t)$$

5. výsledná soustava rovnic v maticovém zápisu

$$\rho AL \begin{bmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{u}}_1 \\ \ddot{\underline{u}}_2 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(t) \\ P(t) \end{Bmatrix}$$

Stejným postupem lze získat pohybové rovnice i jiných pružných soustav

Například pro tenký ohýbaný prut (Bernoulliho-Eulerův prut)

Energie deformace prutu $V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(v'')^2 dx$, kde v je funkce příčného posunutí

Kinetická energie $T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(\dot{v})^2 dx$

Z rovnic ♠ a ♣ lze získat výrazy pro koeficienty tuhosti a hmotnosti

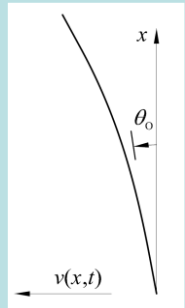
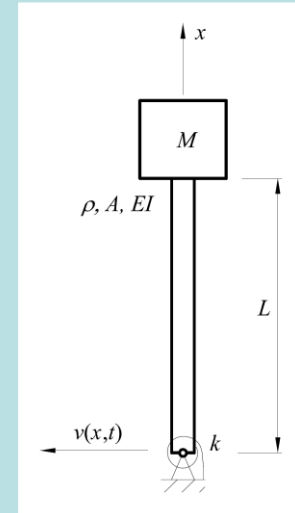
$$k_{ij} = \int_0^L EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \quad \times \quad \text{a} \quad m_{ij} = \int_0^L \rho A \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad +$$

Spojité příčné zatížení $p(x, t)$, $\underline{p}_i = \int_0^L p(x, t) \psi_i(x) dx$ je zobecněné zatížení

Příklad: Vrtná základna je modelována jako pružný prut konstantního průřezu a délky L se soustředěnou hmotností M ve vrcholu a torzní pružinou o tuhosti k v místě částečného vetknutí

Odvoďte pohybové rovnice této konstrukce metodou přípustných funkcí na 2SV modelu

Předpokládají se malé hodnoty pootočení v místě částečného vetknutí



Řešení: 1. výběr tvarových funkcí - okrajová podmínka $v(0, t) = 0$

Potom musí platit $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$

Nejjednodušší funkce jsou $\psi_1 = \frac{x}{L}$ a $\psi_2 = \left(\frac{x}{L}\right)^2$

2. výpočet tuhostních koeficientů k_{ij}

$$V = \int_0^L EI(v'')^2 dx + \frac{1}{2} k \theta_0^2, \text{ kde } \theta_0 \text{ je pootočení v místě částečného vetknutí}$$

Pro malé hodnoty pootočení je $\theta_0 \doteq v'(0, t) = \sum_{i=1}^N \psi'_i(0) \underline{v}_i(t)$

Po dosazení do předchozí rovnice a s přihlédnutím ke vztahu ✖

$$k_{ij} = \int_0^L EI \psi''_i \psi''_j dx + k \psi'_i(0) \psi'_j(0), \text{ kde pro } i, j = 1, 2, \quad \psi'_1 = \frac{1}{L}, \quad \psi''_1 = 0, \quad \psi'_2 = \frac{2}{L} \left(\frac{x}{L}\right) \\ \text{a} \quad \psi''_2 = \frac{2}{L^2}$$

Tuhostní koeficienty

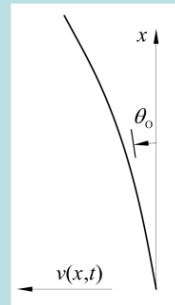
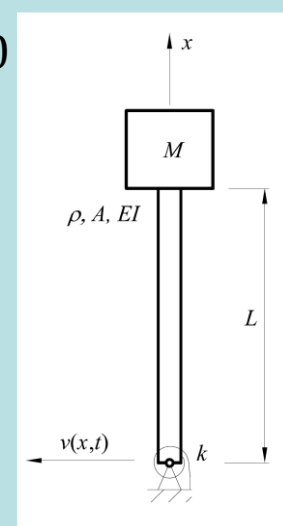
$$k_{11} = 0 + k \left(\frac{1}{L}\right) \left(\frac{1}{L}\right) = \frac{k}{L^2}, \quad k_{12} = k_{21} = 0 + 0 = 0, \quad k_{22} = \frac{4EI}{L^3} + 0 = \frac{4EI}{L^3}$$

3. výpočet hmotnostních koeficientů m_{ij}

Vzhledem ke vztahu + s uvážením hmotnosti M v místě $x = L$

$$m_{ij} = \int_0^L \rho A \psi_i \psi_j dx + M \psi_i(L) \psi_j(L)$$

$$\text{Potom} \quad m_{11} = \rho A \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx + M \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\rho AL}{3} + M, \quad m_{12} = m_{21} = \frac{\rho AL}{4} + M, \quad m_{22} = \frac{\rho AL}{5} + M$$



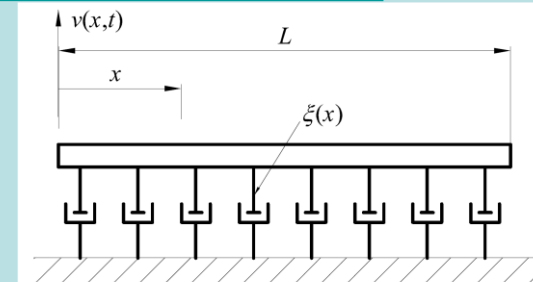
4. výpočet zobecněných sil

Vnější síly nepůsobí $p_1 = p_2 = 0$

5. výsledné pohybové rovnice

$$\begin{bmatrix} M + \frac{\rho AL}{3} & M + \frac{\rho AL}{4} \\ M + \frac{\rho AL}{4} & M + \frac{\rho AL}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{k}{L^2}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{4EI}{L^3}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Příklad: Zahrnutí tlumicího efektu při příčném kmitání základu
 Tlumení je spojitě rozděleno pod základem a je proporcionální rychlosti pohybu základu, tj $p(x, t) = -\xi(x)\dot{v}(x, t)$
 ξ je koeficient tlumení na jednotku délky základu



Najděte vztah pro zobecněnou sílu $\underline{p}_i$ odpovídající uvedenému tlumení

Řešení:

$$\underline{p}_i = \int_0^L p(x, t) \psi_i(x) dx = \int_0^L \left[-\xi(x) \sum_{j=1}^N \psi_j(x) \dot{v}_j(t) \right] \psi_i(x) dx \quad \text{nebo}$$

$$\underline{p}_i = - \sum_{j=1}^N \dot{v}_j(t) \left[\int_0^L \xi(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx \right]$$

odpovídající uvedenému tlumení

$$\underline{p}_i = - \sum_{j=1}^N c_{ij} \dot{v}_j(t)$$

V případě diskrétního (jednotlivého) viskózního tlumiče

V obecném případě (s tlumením) platí

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

$\mathbf{c}$ je matice tlumení

Volné (vlastní) kmitání netlumené soustavy s 2SV

Pohybové rovnice dvoustupňové netlumené soustavy

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

Volné (vlastní) kmitání $p_i = 0$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Při vlastním kmitání je pohyb harmonický

$$u_1 = U_1 \cos(\omega t - \alpha), \quad u_2 = U_2 \cos(\omega t - \alpha)$$

Úlohu o vlastních hodnotách

$$\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

soustava homogenních lineárních algebraických rovnic

Netriviální řešení pro ω^2 vyhovuje **charakteristické rovnici**

$$\det \left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \right) = 0$$

Polynomiální rovnice 2. řádu má dva kořeny ω_1^2 a ω_2^2 - **vlastní čísla**

$\omega_1 \leq \omega_2$ jsou vlastní úhlové frekvence 2SV

Po dosazení kořenů do rovnice  lze určit poměr $\beta_1 = (U_2/U_1)^{(1)}$ a $\beta_2 = (U_2/U_1)^{(2)}$
Tento poměr určuje tvar kmitu

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{pro } \omega_1}$
a
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{pro } \omega_2}$

V matematické terminologii jsou tvary kmitu nazývány **vlastními vektory**



Obecné řešení soustavy rovnic je lineární kombinací vlastního kmitání odpovídajícího frekvencím

$$u_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)$$

$$u_2 = \beta_1 A_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 B_1 \sin(\omega_1 t) + \beta_2 A_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 B_2 \sin(\omega_2 t)$$

Konstanty A_1, A_2, B_1, B_2 se určují z počátečních podmínek

Alternativa zápisu obecného řešení

$$u_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2)$$

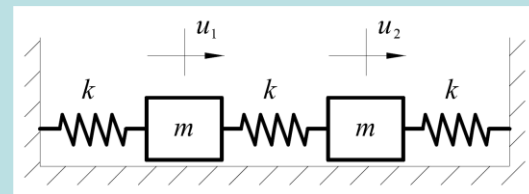
$$u_2 = \beta_1 A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + \beta_2 A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2)$$

Konstanty $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ se určují opět z počátečních podmínek

Příklad: Určete vlastní úhlové frekvence a tvary kmitu soustavy

Pohybové rovnice soustavy jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 &= 0 \\ m\ddot{u}_2 - ku_1 + 2ku_2 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Řešení: Předpoklad - pohyb je harmonický $u_1 = U_1 \cos(\omega_i t - \alpha)$ a $u_2 = U_2 \cos(\omega_i t - \alpha)$

Je zřejmé, že platí $u_2/u_1 = U_2/U_1$

Po dosazení do jednotlivých rovnic získáme soustavu algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} (2k - m\omega_i^2) & -k \\ -k & (2k - m\omega_i^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Zobecněný problém vlastních hodnot
- dvoustupňová soustava

Vlastní čísla ω_i^2 a vlastní vektory $\mathbf{U}_i = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}_i$

Charakteristická rovnice úlohy o vlastních hodnotách

$$\det \begin{bmatrix} (2k - m\omega_i^2) & -k \\ -k & (2k - m\omega_i^2) \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2k - m\omega_i^2)^2 - k^2 = 0$$

$$m^2\omega_i^4 - 4km\omega_i^2 + 3k^2 = 0$$

Charakteristická rovnice má kořeny – např. rozkladem polynomu

$$(m\omega_i^2 - k)(m\omega_i^2 - 3k) = 0, \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad \text{a} \quad \omega_2^2 = \frac{3k}{m}$$

Vlastní úhlové frekvence netlumené soustavy $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{a} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

Po dosazení vlastních čísel do soustavy algebraických rovnic

$$(2k - m\omega_i^2) U_1^{(i)} - kU_2^{(i)} = 0$$

nebo

$$\beta_i = \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^{(i)} = \frac{2k - m\omega_i^2}{k} = 2 - \frac{m\omega_i^2}{k}$$

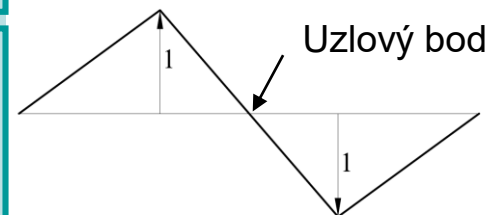
Pro vyčíslená vlastní čísla jsou

$$\beta_1 = 2 - 1 = 1 \quad \text{a} \quad \beta_2 = 2 - 3 = -1$$

Nechť $u_1^{(i)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}_1 \quad \text{a} \quad \mathbf{U}_2$

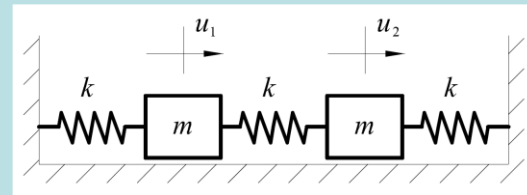
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \mathbf{U}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \mathbf{U}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$



Obecné řešení volného (vlastního) kmitání netlumené soustavy se dvěma stupni volnosti se zakládá na **lineární kombinaci pohybu soustavy ve tvaru kmitu odpovídajícím frekvenci ω_1 a pohybu soustavy ve tvaru kmitu odpovídajícím frekvenci ω_2 .**

Příklad: Zkoumaná soustava je stejná jako v předchozím příkladu s počátečními podmínkami $u_1(0) = \dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = 0$
Vnucená výchylka na počátku děje $u_2(0) = u_0$



Určete volné kmitání soustavy

Řešení: Vlastní kmity soustavy

$$u_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)$$

$$u_2 = A_1 \beta_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \beta_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \beta_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \beta_2 \sin(\omega_2 t)$$

Po derivaci rovnic podle času - rychlosti kmitání - vlastní tvary kmitu

$$\dot{u}_1 = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t) - A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t)$$

$$\dot{u}_2 = -A_1 \beta_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \beta_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t) - A_2 \beta_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \beta_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t)$$

Po zavedení počátečních podmínek – soustava 4 rovnic o 4 neznámých

$$u_1(0) = A_1 + A_2 = 0, \quad u_2(0) = A_1 \beta_1 + A_2 \beta_2 = u_0,$$

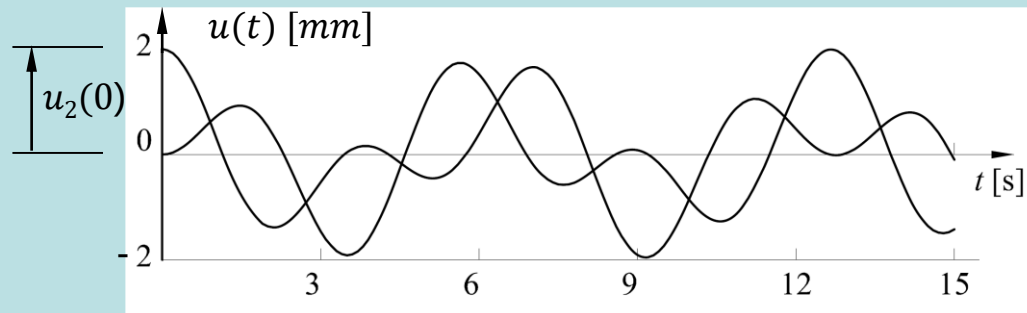
$$\dot{u}_1(0) = B_1 \omega_1 + B \omega_2 = 0 \quad \text{a} \quad \dot{u}_2(0) = B_1 \beta_1 \omega_1 + B_2 \beta_2 \omega_2 = 0.$$

Řešením této soustavy rovnic $A_1 = \frac{u_0}{2}$, $A_2 = -\frac{u_0}{2}$, $B_1 = 0$ a $B_2 = 0$.

Výsledné kmitání $u_1 = \left(\frac{u_0}{2}\right) [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]$ a $u_2 = \left(\frac{u_0}{2}\right) [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]$

Pro $u_0 = 2 \text{ mm}$, $\omega_1 = 1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

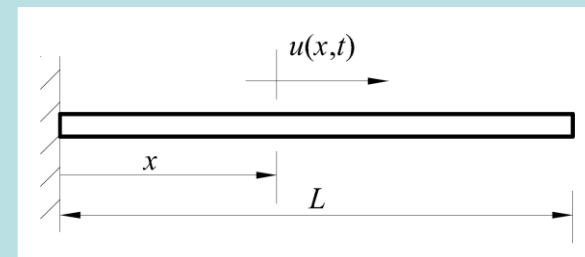
a $\omega_2 = \omega_1\sqrt{3}$, tedy $\omega_2 = \sqrt{3} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$



Uvedené příklady ilustrují základní kroky potřebné pro určení volného kmitání dvoustupňové soustavy

Výpočet vlastních frekvencí a tvarů kmitu podélného kmitání konzoly při použití různých modelů

Modely s dvěma stupni volnosti



„přesné“ řešení - model ∞ SV

A. Řešení metodou přípustných funkcí

Pohybové rovnice
$$\frac{\rho AL}{60} \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\rho AL \begin{bmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(t) \\ P(t) \end{Bmatrix}$$

Předpokládá se harmonický pohyb

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \alpha) \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \omega^2 \cos(\omega t - \alpha)$$

Úloha o vlastních hodnotách – zobecněný problém vlastních hodnot

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \mu_i^2 \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \text{kde} \quad \mu_i^2 = \left(\frac{\rho L^2}{20E} \right) \omega_i^2$$

Charakteristická rovnice

Po úpravě

$$(3 - 20\mu_i^2)(4 - 12\mu_i^2) - (3 - 15\mu_i^2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 15(\mu_i^2)^2 - 26(\mu_i^2) + 3 = 0$$

Kořeny charakteristické rovnice

$$\mu_i^2 = \frac{26 \mp \sqrt{496}}{30} = \begin{cases} 0,1243 & (\omega_1 L)^2 = \left(\frac{20E}{\rho}\right) \mu_1^2 = 2,486 \left(\frac{E}{\rho}\right) \\ 1,6090 & (\omega_2 L)^2 = \left(\frac{20E}{\rho}\right) \mu_2^2 = 32,18 \left(\frac{E}{\rho}\right) \end{cases}$$

$\omega_1 = \frac{1,5577}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
$\omega_2 = \frac{5,673}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

„Přesné řešení“ - odvozeno dříve

$$(\omega_1 L)_{exact}^2 = 2,467 \left(\frac{E}{\rho}\right) \quad \omega_1 = \frac{1,571}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\omega_2 L)_{exact}^2 = 22,21 \left(\frac{E}{\rho}\right) \quad \omega_2 = \frac{4,712}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Poznámky: Obě získané úhlové frekvence jsou vyšší než jejich „přesné“ řešení

Uvedený postup dává aproximaci shora

Základní frekvence je vyčíslena s podstatně větší přesností než druhá frekvence

Výpočet tvarů kmitu - po dosazení μ_i do první rovnice pro výpočet vlast. hodnot

$$(3 - 20\mu_i^2)U_1^{(i)} + (3 - 15\mu_i^2)U_2^{(i)} = 0$$

$$\text{Poměr } \beta_i = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^{(i)} = -\frac{(3 - 20\mu_i^2)}{(3 - 15\mu_i^2)} \quad \text{Číselně } \beta_1 = -\frac{0,514}{1,136} = -0,453 \text{ a } \beta_2 = -1,381$$

Pro získání funkce tvaru kmitu využijeme již dříve odvozený vztah

$$u(x, t) = \left(\frac{x}{L}\right) u_1(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^2 u_2(t)$$

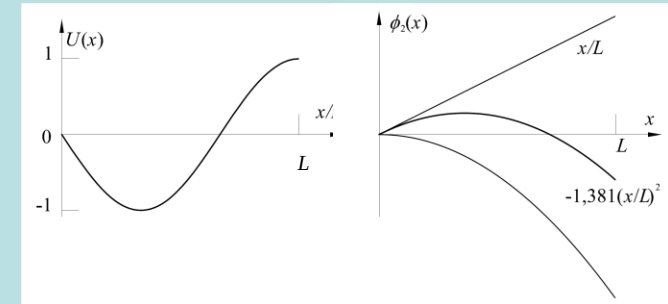
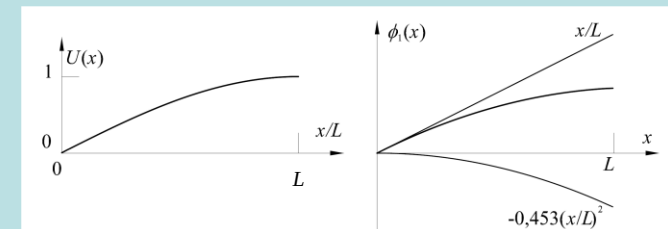
Pro i -tý tvar kmitu platí

$$u^{(i)}(x, t) = \left[\left(\frac{x}{L} \right) + \beta_i \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \cos(\omega_i t - \alpha_i) \text{ nebo}$$

$$u^{(i)}(x, t) = \phi_i(x) \cos(\omega_i t - \alpha_i),$$

kde tvar kmitu

$$\phi_i = \left(\frac{x}{L} \right) + \beta_i \left(\frac{x}{L} \right)^2$$



Přibližné tvary kmitu a jejich „přesné“ ekvivalenty

B. Řešení pomocí diskrétního modelu s náhradou tuhosti pomocí pružin a soustředěnými hmotnostmi

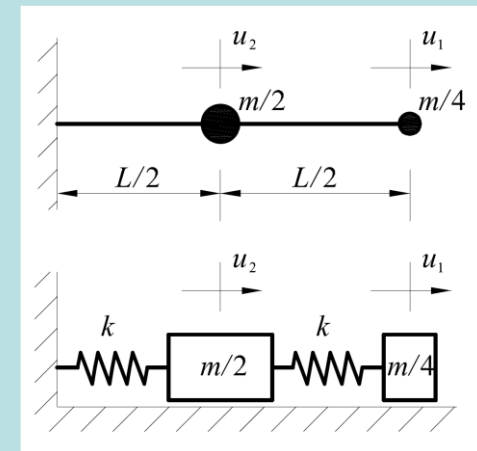
kde $k = \frac{2EA}{L}$ a $m = \rho AL$

Soustava pohybových rovnic

$$\frac{\rho AL}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Předpokládá se harmonický pohyb

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \cos(\omega_i t - \alpha_i)$$



Úloha o vlastních hodnotách $\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \mu_i^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, kde $\mu_i^2 = \left(\frac{\rho L^2}{8E} \right) \omega_i^2$

Charakteristická rovnice $(1 - \mu_i^2)(2 - 2\mu_i^2) - (-1)(-1) = 0 \Rightarrow 2\mu_i^4 - 4\mu_i^2 + 1 = 0$

Kořeny charakteristické rovnice

$$\mu_i^2 = \frac{4 \mp \sqrt{8}}{4} \begin{cases} \mu_1^2 = 0,2929 \\ \mu_2^2 = 1,707 \end{cases} \begin{cases} (\omega_1 L)^2 = 8(0,2929) \left(\frac{E}{\rho}\right) = 2,343 \left(\frac{E}{\rho}\right) \\ (\omega_2 L)^2 = 8(1,7070) \left(\frac{E}{\rho}\right) = 13,66 \left(\frac{E}{\rho}\right) \end{cases}$$

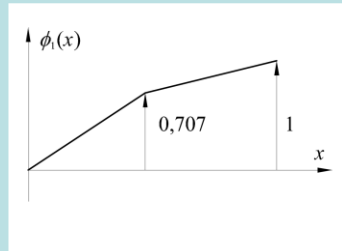
$\omega_1 = \frac{1,531}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

$\omega_2 = \frac{3,696}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

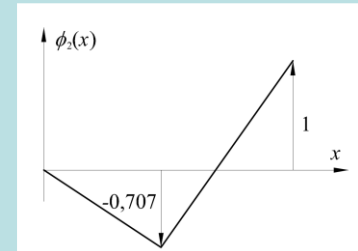
Tvary kmitu – z rovnice pro výpočet vlastních hodnot

$$(1 - \mu_i^2)U_1^{(i)} - U_2^{(i)} = 0 \Rightarrow \beta_1 = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^{(i)} = 1 - \mu_i^2 \Rightarrow \beta_1 = 0,707 \quad \text{a} \quad \beta_2 = -0,707$$

$\mathbf{U}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,707 \end{Bmatrix}$



$\mathbf{U}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,707 \end{Bmatrix}$



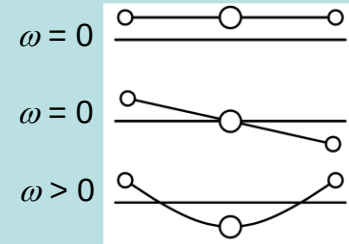
Obě získané úhlové frekvence jsou nižší než jejich přesné hodnoty

Základní frekvence je opět vyčíslena s podstatně větší přesností než druhá frekvence

Soustavy obsahující tvary kmitu odpovídající pohybu soustavy jako tuhého celku

Tvary kmitu odpovídají nulovým hodnotám vlastních frekvencí
Soustava nebo její část přemísťuje (se posouvá a/nebo pootáčí) bez vzniku deformace

Zpravidla se jedná o volné nepodepřené soustavy, dále o případy špatně rozmístěných vazeb, zapomenuté vazby, apod.



Příklad: Určete vlastní úhlovou frekvenci a odpovídající tvary kmitu soustavy

Řešení: Soustava se 2SV se může volně posouvat horizontálně
Jedna vlastní frekvence je nulová

Pohybové rovnice

$$2m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - 2ku_2 = 0 \quad \text{a} \quad m\ddot{u}_2 - 2ku_1 + 2ku_2 = 0$$

Předpokládá se $u_1 = U_1 \cos \omega_i t$ a $u_2 = U_2 \cos \omega_i t$. Po dosazení do pohybových rovnic získáme (úloha o vlastních hodnotách)

$$\begin{bmatrix} (2k - 2m\omega_i^2) & -2k \\ -2k & (2k - m\omega_i^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Charakteristická rovnice

$$(2k - 2m\omega_i^2)(2k - m\omega_i^2) - (2k)^2 = 0, \\ \text{resp. } m\omega_i^2(2m\omega_i^2 - 6k) = 0$$

Kořeny $\omega_1^2 = 0$ a $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$

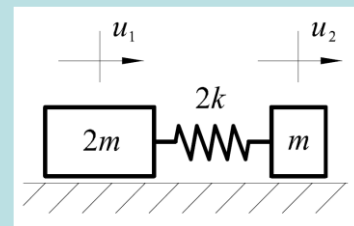
Výpočet vlastních tvarů kmitu

$$(2k - 2m\omega_i^2) U_1^{(i)} - 2kU_2^{(i)} = 0,$$

$$\beta_i = \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^{(i)} = \frac{2k - 2m\omega_i^2}{2k} = 1 - \omega_i^2 \left(\frac{m}{k} \right)$$

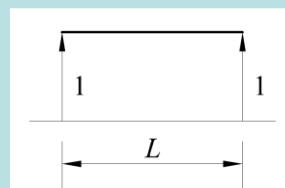
Potom $\beta_1 = 1 - 0 = 1$ a $\beta_2 = 1 - 3 = -2$

Nechť $U_1 = 1$ v obou tvarech $\mathbf{U}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ a $\mathbf{U}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$



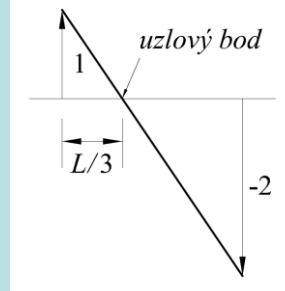
$$\omega_1 = 0$$

$$\mathbf{U}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



$$\omega_2 = \left(\frac{3k}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{U}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$



Odezva netlumené dvoustupňové soustavy na harmonické buzení

Metoda rozkladu podle vlastních tvarů kmitu

Odezva na harmonické buzení byla řešena pro soustavy s 1 SV

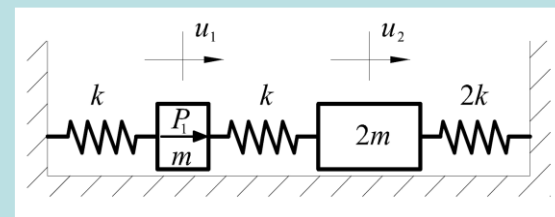
Možnost vzniku rezonance $\Omega = \omega_n$

Soustavy s více stupni volnosti mají větší počet vlastních frekvencí, a tedy i rezonančních oblastí

Příklad: Dvoustupňová soustava je buzena harmonickou silou $p_1 = P_1 \cos \Omega t$

Určete ustálenou odezvu každé z obou soustředěných hmotností (u_1 a u_2) v závislosti na frekvenci

Řešení proveďte rozkladem podle vlastních tvarů kmitu (metoda superpozice tvarů kmitu).



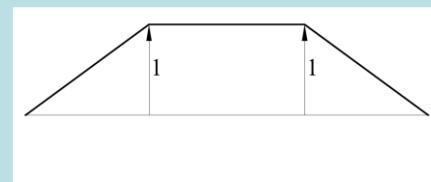
Pohybové rovnice

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos \Omega t$$

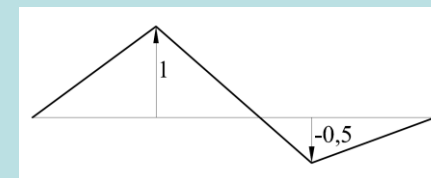
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{m}} \quad \text{a} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Vlastní frekvence a tvary kmitu

1. vlastní tvar kmitu



2. vlastní tvar kmitu



Řešení:

a) Vlastní tvary kmitu sestavíme do matice Φ

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Matice se nazývá modální (mode lat. tvar)

b) Po zavedení hlavních (přirozených) souřadnic η_1 a η_2 lze zapsat transformaci souřadnic

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 + \eta_2 \\ \eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\mathbf{u} = \Phi \boldsymbol{\eta}}, \quad \ddot{\mathbf{u}} = \Phi \ddot{\boldsymbol{\eta}}$$

Vlastní vektory (tvary kmitu) jsou ortogonální – báze vektory

c) Transformace pohybových rovnic z fyzikálních souřadnic do hlavních souřadnic

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p} \Rightarrow \Phi^T [\mathbf{m}(\Phi \ddot{\boldsymbol{\eta}}) + \mathbf{k}(\Phi \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{p}(t)] \Rightarrow (\Phi^T \mathbf{m} \Phi) \ddot{\boldsymbol{\eta}} + (\Phi^T \mathbf{k} \Phi) \boldsymbol{\eta} = \Phi^T \mathbf{p}(t)$$



$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{P}}, \text{ kde } \mathbf{M} = \Phi^T \mathbf{m} \Phi, \mathbf{K} = \Phi^T \mathbf{k} \Phi \text{ a } \mathbf{P} = \Phi^T \mathbf{p}$$

$\mathbf{M}$ - modální matice hmotnosti, $\mathbf{K}$ - modální matice tuhosti, $\mathbf{P}$ - modální zatěžovací vektor

Číselné vyjádření

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15/4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos(\Omega t) = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{Bmatrix} \cos(\Omega t).$$

Pohybové rovnice zapsané pomocí hlavních souřadnic

$$m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{Bmatrix} \cos(\Omega t)$$

Pohybové rovnice v hlavních souřadnicích jsou soustavou **nezávislých rovnic** (rovníc s 1 neznámou – soustava s 1 SV)

Jedná se o rovnice $3m\ddot{\eta}_1 + 3k\eta_1 = P_1 \cos(\Omega t)$ a $\left(\frac{3}{2}\right)m\ddot{\eta}_2 + \left(\frac{15}{4}\right)k\eta_2 = P_1 \cos(\Omega t)$

d) Řešení ustálené odezvy

Předpokládá se harmonický pohyb $\eta_1 = Y_1 \cos(\Omega t)$ a $\eta_2 = Y_2 \cos(\Omega t)$

Potom

$$Y_1 = \frac{P_1}{3k - 3m\Omega^2} = \frac{(1/3 k)P_1}{1 - (\Omega/\omega_1)^2} \quad \text{a} \quad Y_2 = \frac{P_1}{(15/4)k - (3/2)m\Omega^2} = \frac{(4/15 k)P_1}{1 - (\Omega/\omega_2)^2}$$

e) Zpětná transformace do fyzikálních souřadnic

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 + \eta_2 \\ \eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = U_1 \cos(\Omega t) \quad \text{a} \quad u_2 = U_2 \cos(\Omega t),$$

kde

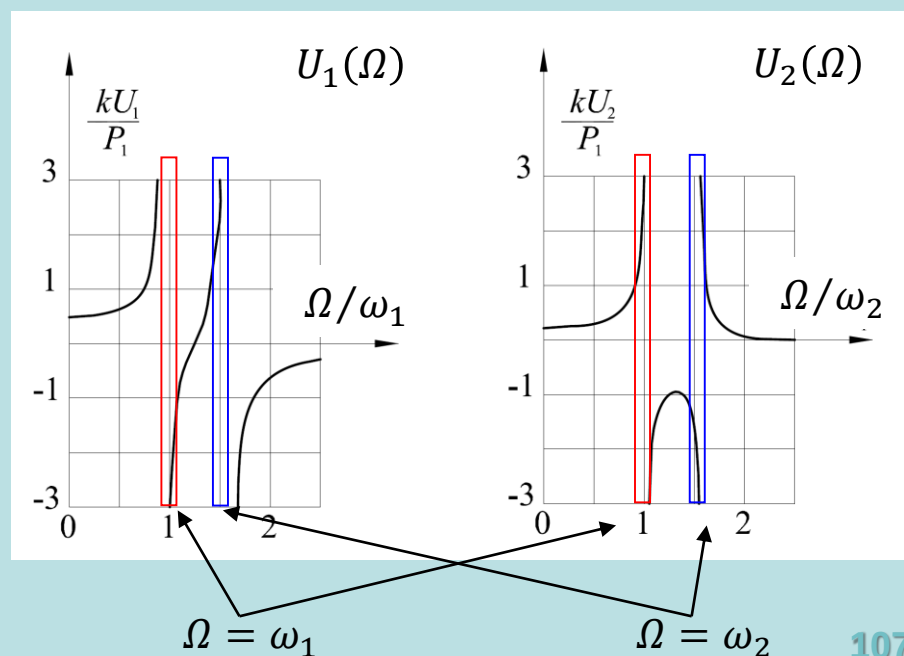
$$U_1 = \left[\left(\frac{P_1/3k}{1 - (\Omega/\omega_1)^2} \right) + \left(\frac{4P_1/15k}{1 - (\Omega/\omega_2)^2} \right) \right]$$

a

$$U_2 = \left[\left(\frac{P_1/3k}{1 - (\Omega/\omega_1)^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{4P_1/15k}{1 - (\Omega/\omega_2)^2} \right) \right]$$

Rezonance při $\Omega = \omega_1$ a $\Omega = \omega_2$

Amplitudo-frekvenční závislost
(charakteristika)



Vlastní kmitání soustav s mnoha stupni volnosti

Zobecnění soustavy s dvěma stupni volnosti

Vlastní frekvence a vlastní tvary kmitů

a) Vlastnosti matic **k** a **m**

Potenciální energie deformace soustavy (konstrukce) $V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u}$ je kvadratická funkce zobecněných souřadnic $\mathbf{u}$ s koeficienty k_{ij}

Kinetická energie soustavy (konstrukce) $T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}$ je kvadratická funkce zobecněných souřadnic $\dot{\mathbf{u}}$ s koeficienty m_{ij}

Matice tuhosti a hmotnosti jsou čtvercové matice symetrické vůči hlavní diagonále

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{k} \quad \text{a} \quad \mathbf{m}^T = \mathbf{m}$$

Ve většině případů modelů soustav (konstrukcí) jsou matice **k** a **m** pozitivně definitní

Pro nenulový vektor $\mathbf{u}$ a $\dot{\mathbf{u}}$ platí $V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} > 0$ a $T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}} > 0$

Nemá-li soustava (konstrukce) dostatečný počet vazeb, potom matice **k** je pozitivně semidefinitní, platí

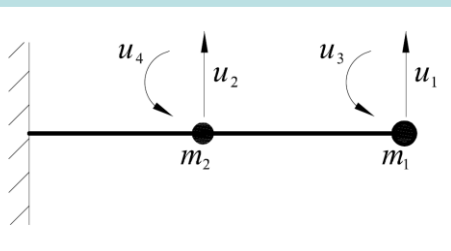
$$V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} \geq 0$$

Při výpočtu se to projeví tím, že determinant matice **k** má nulové kořeny, neboli jinak matice **k** je singulární

Matice hmotnosti může být semidefinitní v případě, kdy máme soustavu rovnic, u které některé prvky matice hmotnosti odpovídající stupňům volnosti jsou nulové

Řečeno jinak soustava obsahuje nehmotné stupně volnosti

Příklad: Tenký Bernoulli-Eulerův prut



$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotační stupně volnosti
jsou nehmotné I_1 a I_2 jsou zanedbány

b. Úloha o vlastních hodnotách soustavy bez tlumení – zobecněný problém vlastních hodnot

Pohybová rovnice volného (vlastního) kmitání $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$\mathbf{m}$ a $\mathbf{k}$ jsou matice dimenze (N, N) a vektor $\mathbf{u}(t)$ je dimenze $(N, 1)$

Předpokládá se při kmitání harmonický pohyb

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \cos(\omega t - \alpha)$$

Po dvojí derivaci podle času

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mathbf{U} \cos(\omega t - \alpha)$$

Po dosazení do pohybové rovnice a po drobných úpravách

$$(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m})\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

Soustava lineárních algebraických rovnic
Zobecněný problém vlastních hodnot svazku $(\mathbf{k}, \mathbf{m})$

Netriviální řešení odpovídá $\det(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}) = 0$

Vyjádření determinantu vede na charakteristickou rovnici o N kořenech

Úloha má N kořenů $\lambda = \omega^2$

Uspořádaná množina kořenů podle velikosti tvoří spektrum vlastních čísel ω^2

Spektrum vlastních čísel $0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_r^2 \dots \leq \omega_N^2$

Každému vlastnímu číslu ω_r^2 odpovídá vlastní vektor $\mathbf{U}_r = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_N \end{Bmatrix}_r$, kde $r = 1, 2, \dots, N$.

Řešením je N vlastních úhlových frekvencí ω_r respektive frekvencí f_r a N vlastních tvarů kmitu sestavených z vlastních vektorů

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} \Rightarrow r\text{-tá perioda } T_r = \frac{2\pi}{\omega_r} = \frac{1}{f_r}$$

Z praktického hlediska mají pro stavební konstrukce význam pouze frekvence v oblasti od 0 do 500 Hz

Vysoké hodnoty frekvencí při řešení kmitání konstrukcí nemají zpravidla fyzikální smysl

c. Normování

Vlastní vektor lze zapsat ve tvaru $\mathbf{U}_r = c_r \boldsymbol{\phi}_r$, kde c_r je konstanta

Tři základní způsoby normování - obdobně jako u soustav ∞ mnoha stupni volnosti

- 1) Úprava r -tého tvaru tak, že $(\phi_i)_r = 1$ pro vybranou souřadnici
- 2) Úprava r -tého tvaru tak, že $(\phi_i)_r = 1$, pro $|(\phi_i)_r| = \max_j |(\phi_i)_r|$
tj. maximální hodnota přemístění odpovídá souřadnici i
- 3) Úprava r -tého tvaru tak, že modální (zobecněná) hmotnost $M_r = \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r$
je rovna jedné, tj. $M_r = 1$

d. Vlastní tvary – případ jednonásobných vlastních čísel

Nechť matice $\mathbf{D}$ je dána rovnicí

$$\mathbf{D}(\omega_r) = \mathbf{k} - \omega_r^2 \mathbf{m} \quad +$$

Předpokládá se, že souřadnice 1 v rovnici neodpovídá uzlovému bodu v r -tém tvaru

Potom rovnici $+$ lze přepsat takto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{aa}(\omega_r) & \mathbf{D}_{ab}(\omega_r) \\ \mathbf{D}_{ba}(\omega_r) & \mathbf{D}_{bb}(\omega_r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\phi}_b \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

kde vlastní tvar (vektor) $\boldsymbol{\phi}_r$ je upraven tak, že $(\phi_1)_r = 1$ a $(\boldsymbol{\phi}_b)_r = \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \dots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_r$

Je-li ω_r nenásobná, potom hodnota matice $\mathbf{D}_{bb}(\omega_r)$ je $(N - 1)$ a $\mathbf{D}_{bb}(\omega_r)$ není singulární

Dopočet členů vektoru $\boldsymbol{\phi}_r$ lze provést podle předpisu $(\boldsymbol{\phi}_b)_r = -[\mathbf{D}_{bb}(\omega_r)]^{-1} \mathbf{D}_{ba}(\omega_r)$
např. Gaussovou eliminací

Příklad: Pro soustavu určete ω_r^2 pro $r = 1, 2, 3$
a vykreslete průběh charakteristického polynomu
Vyčíslete tvar kmitu odpovídající ω_2

Řešení: Matice tuhosti a hmotnosti

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

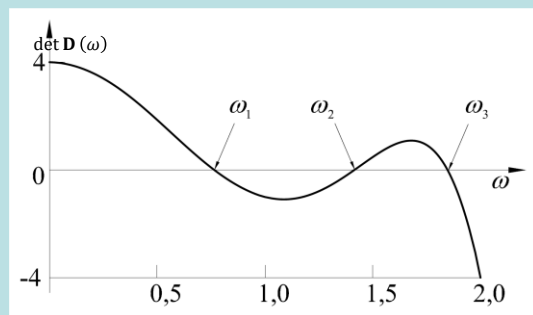
Potom

$$\mathbf{D}(\omega) = \begin{bmatrix} (2 - \omega^2) & -1 & 0 \\ -1 & (2 - \omega^2) & -1 \\ 0 & -1 & (2 - \omega^2) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Charakteristický polynom soustavy} \\ \text{je roven 0} \end{array}$$

$$\det[\mathbf{D}(\omega)] = (2 - \omega^2)(\omega^4 - 4\omega^2 + 2) = 0$$

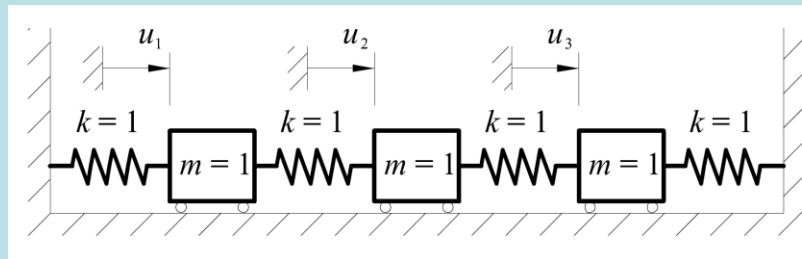
Vypočtené kořeny polynomu (vlastní čísla) $\omega_1^2 = 2 - \sqrt{2}$, $\omega_2^2 = 2$ a $\omega_3^2 = 2 + \sqrt{2}$

Průběh determinantu



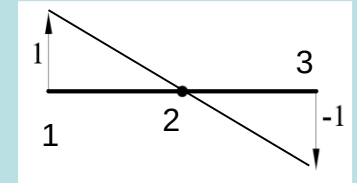
Výpočet vlastního vektoru (tvaru kmitu) odpovídajícího ω_2

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{aa}(\omega_2) & \mathbf{D}_{ab}(\omega_2) \\ \mathbf{D}_{ba}(\omega_2) & \mathbf{D}_{bb}(\omega_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{bb}(\omega_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{D}_{ba}(\omega_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Inverzní matice $[\mathbf{D}_{bb}(\omega_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, potom

$$(\phi_b)_2 = -[\mathbf{D}_{bb}(\omega_2)]^{-1} \mathbf{D}_{ba}(\omega_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$



Protože $(\phi_1)_2 = 1$, potom tvar kmitu odpovídající ω_2 $\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$

e. Ortogonalita vlastních tvarů

Obdobně jako u modelů spojitých soustav

Pro různé frekvence $\omega_r \neq \omega_s$ platí

$$\phi_s^T \mathbf{m} \phi_r = 0 \quad - \text{ortogonalita vzhledem k matici hmotnosti}$$

$$\phi_s^T \mathbf{k} \phi_r = 0 \quad - \text{ortogonalita vzhledem k matici tuhosti}$$

f. Vlastní tvary – případ násobných vlastních čísel

Může nastat případ, kdy frekvence jsou velmi blízké (numericky) popř. teoreticky stejné (čtvercová deska, cyklická symetrie u turbín apod.)

Potom se může jednat o násobné frekvence

Pokud platí $\omega_r = \omega_{r+1} = \dots = \omega_{r+p-1}$, je vlastní číslo p -násobné nebo p -násobná vlastní frekvence

p -násobnému vlastnímu číslu odpovídá p lineárně nezávislých vlastních vektorů

Tyto vektory tvoří podprostor vlastních vektorů dimenze p

Výpočet těchto vektorů vyžaduje speciální postupy

g. Modální matice

Modální matice soustavy je matice tvořená sloupcově uspořádanými vlastními vektory (tvary kmitu)

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_N]$$

h. Zobecněná matice hmotnosti a zobecněná matice tuhost

Diagonální matice hmotnosti $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \Phi^T \mathbf{m} \Phi = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_N)$$

Diagonální matice tuhosti $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \Phi^T \mathbf{k} \Phi = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_N)$$

Jsou-li vlastní tvary normovány tak, že $M_r = 1$, potom množina vektorů (tvarů kmitu) se nazývá ortonormální – ortogonální a normovaná

Matice $\mathbf{M}$ je potom jednotkovou maticí

$$\Phi^T \mathbf{m} \Phi = \mathbf{I}$$

a $\Phi^T \mathbf{k} \Phi = \Lambda$, kde $\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2)$

i. Teorém o rozkladu

Obdobně jako u spojitých systému platí pro soustavy s mnoha stupni volnosti lze libovolný vektor $\mathbf{u}$ vyjádřit jako lineární kombinaci nezávislých vlastních vektorů

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^N c_r \phi_r, \text{ kde } c_r = \left(\frac{1}{M_r} \right) \phi_r^T \mathbf{m} \mathbf{u}$$

Uvedený vztah je základem metody rozkladu do vlastních tvarů kmitu

Obecné řešení volného (vlastního kmitání)

Vlastní kmitání netlumené soustavy o N stupních volnosti v r -tém tvaru můžeme s využitím teoremu o rozkladu zapsat

$$\mathbf{u}_r = c_r \boldsymbol{\phi}_r \cos(\omega_r t - \alpha_r)$$

Potom obecné řešení, dle rovnice

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^N c_r \boldsymbol{\phi}_r \cos(\omega_r t - \alpha_r) \quad \text{nebo} \quad \mathbf{u} = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\phi}_r [a_r \cos(\omega_r t) + b_r \sin(\omega_r t)]$$

$2N$ koeficientů (c_r, α_r) nebo (a_r, b_r) se určí z počátečních podmínek $\mathbf{u}(0)$ a $\dot{\mathbf{u}}(0)$

Například koeficienty a_r a b_r určíme z výrazů $\mathbf{u}(0) = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\phi}_r a_r$ a $\dot{\mathbf{u}}(0) = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\phi}_r b_r$

Po vynásobení rovnic členem $\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m}$

$$a_r = \frac{\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \mathbf{u}(0)}{M_r} \quad \text{a} \quad b_r = \frac{\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}(0)}{M_r \omega_r}$$

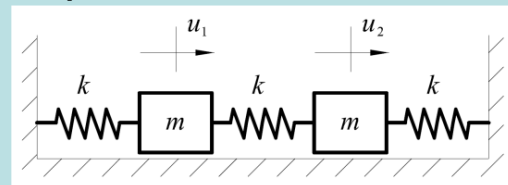
Příklad: S využitím uvedených rovnic sestavte výrazy pro odezvu při vlastním kmitání dvoustupňové soustavy

Počáteční podmínky

Mat. hmotností

Vlastní tvary kmitu

$$\mathbf{u}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ u_0 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$



Řešení:

a) Výpočet modálních hmotností M_r ze vztahu $M_r = \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r$

$$M_1 = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 2m \quad \text{a} \quad M_2 = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 2m$$

b) Výpočet koeficientů a_r a b_r , $a_r = \frac{\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \mathbf{u}(0)}{M_r}$, $b_r = \frac{\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}(0)}{M_r \omega_r}$,

$$\text{kde } \mathbf{m} \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ m u_0 \end{Bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}(0) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{\boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{m} \mathbf{u}(0)}{M_1} = \left(\frac{1}{2m} \right) [1 \quad 1] \begin{Bmatrix} 0 \\ m u_0 \end{Bmatrix} = \frac{u_0}{2}$$

$$a_2 = \frac{\boldsymbol{\phi}_2^T \mathbf{m} \mathbf{u}(0)}{M_2} = \left(\frac{1}{2m} \right) [1 \quad -1] \begin{Bmatrix} 0 \\ m u_0 \end{Bmatrix} = -\frac{u_0}{2}$$

c) Nakonec $\mathbf{u} = \sum_{r=1}^2 a_r \boldsymbol{\phi}_r \cos(\omega_r t)$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{u_0}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t) - \frac{u_0}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t) \quad \text{nebo}$$

$$u_1(t) = \left(\frac{u_0}{2} \right) [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]$$

$$u_2(t) = \left(\frac{u_0}{2} \right) [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]$$

Rayleighův kvocient (podíl) u soustav s mnoha stupni volnosti

Obdobně jako u soustav s ∞ mnoho stupni volnosti

$$\omega_R^2 = R(\mathbf{U}) = \frac{\mathbf{U}^T \mathbf{k} \mathbf{U}}{\mathbf{U}^T \mathbf{m} \mathbf{U}}$$

$\mathbf{U}$ rozložíme do řady **ortonormálních** tvarů $\boldsymbol{\phi}_r$ ($M_r = 1$ pro všechna r), $\mathbf{U} = \sum_{r=1}^N c_r \boldsymbol{\phi}_r$

Vzhledem k ortogonalitě vlastních tvarů

$$R(\mathbf{U}) = \frac{\omega_1^2 c_1^2 + \omega_2^2 c_2^2 + \dots + \omega_N^2 c_N^2}{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_N^2}$$

Lze dokázat, že

$$\omega_1^2 \leq R(\mathbf{U}) \leq \omega_N^2$$

Je-li $\omega_1 \neq 0$ potom

$$R(\mathbf{U}) = \omega_1^2 \left[\frac{1 + (c_2/c_1)^2 (\omega_2/\omega_1)^2 + \dots + (c_N/c_1)^2 (\omega_N/\omega_1)^2}{1 + (c_2/c_1)^2 + \dots + (c_N/c_1)^2} \right]$$

Protože $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_N$, potom každý člen v čitateli je větší nebo roven odpovídajícímu členu ve jmenovateli

Tedy $R(\mathbf{U}) \geq \omega_1^2$

Obdobně lze dokázat, že $R(\mathbf{U}) \leq \omega_N^2$

Rayleighova metoda - slouží k aproximaci základní frekvence ω_R

Nechť $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U} \cos(\omega_R t) = \boldsymbol{\psi} \hat{U} \cos(\omega_R t)$, kde $\boldsymbol{\psi}$ je přípustný tvar (vektor)

Potom $\dot{\mathbf{u}}(t) = -\omega_R \mathbf{U} \sin(\omega_R t) = -\omega_R \boldsymbol{\psi} \hat{U} \sin(\omega_R t)$

Protože $V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u}$ a $T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}$

Potom $V_{\max} = \frac{1}{2} \hat{k} \hat{U}^2$ a $T_{\max} = \frac{1}{2} \omega_R^2 \hat{m} \hat{U}^2$, kde $\hat{k} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\psi}$ a $\hat{m} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\psi}$

Pro konservativní soustavu (soustavu bez disipace energie) platí $V_{\max} = T_{\max}$

Potom $R(U) = \omega_R^2 = \frac{\hat{k}}{\hat{m}}$

Opět platí $\omega_1^2 \leq \omega_R^2 \leq \omega_N^2$

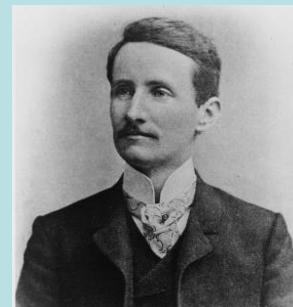
Je-li přípustný vektor blízký tvaru kmitu $\boldsymbol{\phi}_R$, potom lze určit s velkou přesností ω_R

Rayleighova-Ritzova metoda - metoda dovoluje získat aproximace frekvencí $\hat{N}$ tvarů, kde $\hat{N} < N$

Předpokládá se harmonický pohyb $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U} \cos(\omega t - \alpha)$

Vektor $\mathbf{U}$ lze rozložit do řady $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^N \hat{U}_i \boldsymbol{\psi}_i = \boldsymbol{\Psi} \hat{\mathbf{U}}$, kde $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_N]$

$\boldsymbol{\psi}_i$ jsou lineárně nezávislé přípustné vektory (tvary)



Za předpokladu, že $V_{\max} = T_{\max}$

Rayleighův kvocient (podíl) $R(\mathbf{U}) = \hat{\omega}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\hat{N}} \sum_{j=1}^{\hat{N}} \hat{U}_i \hat{U}_j k_{ij}}{\sum_{i=1}^{\hat{N}} \sum_{j=1}^{\hat{N}} \hat{U}_i \hat{U}_j m_{ij}} = \frac{\hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{U}}}{\hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{U}}}$,

kde $\hat{\mathbf{k}} = \Psi^T \mathbf{k} \Psi$ a $\hat{\mathbf{m}} = \Psi^T \mathbf{m} \Psi$

Hodnota $\hat{\omega}^2$ je závislá na hodnotách $\hat{U}_i, i = 1, 2, \dots, \hat{N}$

Ritz předpokládal, že koeficienty $\hat{U}_i$ je možné určit z podmínky stacionarity $R(U)$

$$\frac{\partial R(\mathbf{U})}{\partial \hat{U}_i} = 0, i = 1, 2, \dots, \hat{N} \quad \text{Záměna } R(\mathbf{U}) = \frac{N(\mathbf{U})}{D(\mathbf{U})} \Rightarrow N(\mathbf{U}) \frac{\partial D(\mathbf{U})}{\partial \hat{U}_i} - D(\mathbf{U}) \frac{\partial N(\mathbf{U})}{\partial \hat{U}_i} = 0$$

$$\frac{\partial N(\mathbf{U})}{\partial \hat{U}_i} = 2 \sum_{j=1}^{\hat{N}} \hat{k}_{ij} \hat{U}_j$$

$$\frac{\partial D(\mathbf{U})}{\partial \hat{U}_i} = 2 \sum_{j=1}^{\hat{N}} \hat{m}_{ij} \hat{U}_j$$

Rovnice má tvar $\omega^2 = \frac{N(\mathbf{U})}{D(\mathbf{U})} = \frac{\frac{\partial N(\mathbf{U})}{\partial \hat{U}_i}}{\frac{\partial D(\mathbf{U})}{\partial \hat{U}_i}} = \frac{2 \sum_{j=1}^{\hat{N}} \hat{k}_{ij} \hat{U}_j}{2 \sum_{j=1}^{\hat{N}} \hat{m}_{ij} \hat{U}_j} \Rightarrow \omega^2 \sum_{j=1}^{\hat{N}} \hat{m}_{ij} \hat{U}_j = \sum_{j=1}^{\hat{N}} \hat{k}_{ij} \hat{U}_j$

$$\sum_{j=1}^{\hat{N}} (\hat{k}_{ij} - \hat{\omega}^2 \hat{m}_{ij}) \hat{U}_j = 0, i = 1, 2, \dots, \hat{N} \quad \text{nebo } (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\omega}^2 \hat{\mathbf{m}}) \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$$

Úloha o vlastních hodnotách vede na $\hat{N}$ aproximací frekvencí $\hat{\omega}_r$ a tvarů kmitu $\hat{\mathbf{U}}_r$

Metoda redukuje soustavu s N SV na soustavu s $\hat{N}$ SV $\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{\hat{N}} \psi_i \hat{u}_i(t) = \Psi \hat{\mathbf{u}}(t)$

S využitím Lagrangeho rovnic v obecném případě

$$\hat{\mathbf{m}} \ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{c}} \dot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{p}}(t), \text{ kde } \hat{\mathbf{m}} = \Psi^T \mathbf{m} \Psi, \hat{\mathbf{c}} = \Psi^T \mathbf{c} \Psi, \hat{\mathbf{k}} = \Psi^T \mathbf{k} \Psi \text{ a } \hat{\mathbf{p}}(t) = \Psi^T \mathbf{p}(t)$$

Numerické metody pro výpočet tvarů a frekvencí soustav s mnoha stupni volnosti

A Výpočet všech vlastních hodnot redukované soustavy

Householder – bisekce – inverzní iterace

metoda je účinná, když hledáme všechny vlastní frekvence a tvary kmitu a matice jsou plné nebo s velkou šířkou pásu (do 5000 rovnic) –

- a) Guyanova redukce – převod z velkého počtu stupňů volnosti na malý počet
- b) Převedení na standardní problém vlastních čísel
- c) Aplikace Householderova postupu na převedení matice na tridiagonální tvar
- d) Kombinace bisekce s kontrolou pomocí Sturmových posloupností – výpočet vlastních čísel
- e) Metoda inverzních iterací s posunutím – výpočet vlastních vektorů
- f) Přepočet na původní (neredukovaný) počet stupňů volnosti

B Výpočet vlastních hodnot v levé části spektra

Iterace podprostoru

metoda je účinná při hledání nejnižších vlastních frekvencí a odpovídajících tvarů kmitu u soustav s velkým počtem rovnic (řádově 100 000 rovnic) – využívá podobnostní transformaci s Rayleighovou-Ritzovou metodou

Lanczosova metoda

provádí řešení po blocích – převod na tridiagonální tvar pomocí podobnostní transformace

V současné době nejefektivnější metoda nahrazující iteraci podprostoru

Metoda dovoluje určovat frekvence a odpovídající vlastní tvary v zadaných frekvenčních mezích (řádově do 1 000 000 a více rovnic)

Všechny uvedené metody jsou iterační

Dynamická odezva soustav s mnoha stupni volnosti

Metoda rozkladu podle tvarů kmitu

Soustava pohybových rovnic

Počáteční podmínky

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \text{ a } \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0$$

Obecně mají matice $\mathbf{m}$, $\mathbf{c}$ a $\mathbf{k}$ nenulové mimodiagonální (svazující) členy

- nejčastěji $k_{ij} = k_{ji} \neq 0$

Pohybové rovnice představují soustavu N **simultánních** rovnic o N neznámých.

V metodě rozkladu podle tvarů kmitu soustava závislých rovnic je transformována na soustavu N **nezávislých** rovnic s využitím tvarů kmitu.

Základním krokem metody rozkladu podle tvarů kmitu je výpočet vlastních frekvencí a tvarů kmitu (předpokládá se, že ve výpočtu jsou použity všechny tvary), tj. N tvarů kmitu. **Prakticky** lze pracovat pouze s několika tvary kmitu.

Úloha o vlastních hodnotách (modální analýza, zobecněný problém vlastních hodnot)

$$(\mathbf{k} - \omega_r^2 \mathbf{m})\boldsymbol{\phi}_r = 0, \text{ kde } r = 1, \dots, N$$

Řešením získáme dvojice $(\omega_r^2, \boldsymbol{\phi}_r)$, pro $r = 1, \dots, N$

Tvary $\boldsymbol{\phi}_r$ mohou být normovány, jak bylo uvedeno dříve

Výpočet modální hmotnosti $M_r = \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r$

Výpočet modální tuhosti $K_r = \omega_r^2 M_r$

Platí podmínky ortogonality vlastních tvarů $\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_s = \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_s = 0$, pro $r \neq s$

Vlastní tvary jsou uspořádané do modální matice

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]$$

Stěžejním krokem metody rozkladu podle tvarů kmitu je transformace souřadnic

$$\mathbf{u}(t) = \Phi \boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{r=1}^N \phi_r \eta_r(t)$$

Souřadnice $\eta_r(t)$ se nazývají hlavní (vlastní, přirozené) souřadnice

Po dosazení do pohybových a po vynásobíme zleva transponovanou modální maticí Φ^T

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{P}(t), \quad \text{- pohybové rovnice v hlavních souřadnicích } \eta_r(t)$$

kde $\mathbf{M} = \Phi^T \mathbf{m} \Phi$ - modální matice hmotnosti

$$\mathbf{C} = \Phi^T \mathbf{c} \Phi \text{ - modální matice tlumení}$$

$$\mathbf{K} = \Phi^T \mathbf{k} \Phi \text{ - modální matice tuhosti}$$

$$\mathbf{P}(t) = \Phi^T \mathbf{p}(t) \text{ - modální zatěžovací vektor}$$

Vzhledem k podmínkám ortogonality matice $\mathbf{M}$ a $\mathbf{K}$ jsou diagonální.

Soustava rovnic je vzájemně závislá pouze pomocí mimodiagonálních členů matice tlumení $\mathbf{C}$.

Existují však speciální typy tlumení, kdy modální matice $\mathbf{C}$ je diagonální.

Potom soustava pohybových rovnic v hlavních souřadnicích představuje soustavu N **nezávislých** rovnic.

Celková odezva $\eta(t)$ může být získána po zavedení počátečních podmínek

$$\mathbf{u}(0) = \Phi \boldsymbol{\eta}(0) \quad \text{a} \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \Phi \dot{\boldsymbol{\eta}}(0)$$

Po vynásobení těchto rovnic členem $\Phi^T \mathbf{m}$ zleva, získáme

$$\Phi^T \mathbf{m} \mathbf{u}(0) = \mathbf{M} \boldsymbol{\eta}(0) \quad \text{a} \quad \Phi^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\eta}}(0)$$

Matice $\mathbf{M}$ je diagonální, potom lze modální počáteční podmínky zapsat takto

$$\eta_r(0) = \left(\frac{1}{M_r} \right) \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \mathbf{u}(0) \quad \text{a} \quad \dot{\eta}_r(0) = \left(\frac{1}{M_r} \right) \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}(0), \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, N$$

Vyřeší se soustava pohybových rovnic v hlavních souřadnicích – soustava nezávislých rovnic – jednostupňové soustavy v hlavních souřadnicích

Řešení numerickou integrací s modálními počátečními podmínkami – Duhamelův integrál

Po nalezení řešení v hlavních souřadnicích $\eta_r(t)$ se provede přepoččet do původních

Souřadnic podle vztahu
$$\mathbf{u}(t) = \Phi \boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\phi}_r \eta_r(t)$$

Řešení odezvy netlumené soustavy rozkladem podle tvarů kmitu v přemístěních

Původní úvahy se vztahují k případům, kdy se pracuje s plnou množinou N vlastních tvarů

Metoda rozkladu podle tvarů kmitu je efektivnější, pracuje-li se pouze se zúženou množinou vlastních tvarů soustavy

Výběr počtu vlastních tvarů ovlivňuje přesnost řešení

Relativně malý počet tvarů produkuje velmi dobrou aproximaci přesného řešení

Přemístění $\mathbf{u}(t)$ lze aproximovat výrazem

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \hat{\mathbf{\Phi}}\hat{\boldsymbol{\eta}}(t) = \sum_{r=1}^{\hat{N}} \boldsymbol{\phi}_r \eta_r(t), \text{ kde } \hat{\mathbf{\Phi}} = [\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2 \dots \boldsymbol{\phi}_{\hat{N}}]$$

Je využito pouze $\hat{N}$ vlastních tvarů z celkového počtu N tvarů, kdy $\hat{N} \ll N$ (například $\hat{N} = 50$, $N = 1000$)

Pro netlumenou soustavu pohybové rovnice v hlavních souřadnicích

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} + \hat{\mathbf{K}}\hat{\boldsymbol{\eta}} = \hat{\mathbf{P}}(t)$$

Modální matice tuhosti a hmotnosti jsou diagonální soustava pohybových rovnic je soustavou $\hat{N}$ nezávislých rovnic

$$M_r \ddot{\eta}_r + K_r \eta_r = P_r(t), r = 1, 2, \dots, \hat{N}, \text{ kde } M_r = \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r, K_r = \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_r \text{ a } P_r(t) = \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{p}(t)$$

Celková odezva v r -tém tvaru může být vyjádřena jako superpozice odezvy na modální počáteční podmínky a odezvy na modální síly $P_r(t)$

$$\eta_r(t) = \eta_r(0) \cos(\omega_r t) + \left(\frac{1}{\omega_r} \right) \dot{\eta}_r(0) \sin(\omega_r t) + \left(\frac{1}{M_r \omega_r} \right) \int_0^t P_r(\tau) \sin[\omega_r(t - \tau)] d\tau$$

Řešením jsou funkce přemístění $\eta_r(t)$

Po vyřešení odezvy v hlavních souřadnicích se provede zpětná substituce

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \hat{\mathbf{\Phi}}\hat{\boldsymbol{\eta}}(t) = \sum_{r=1}^{\hat{N}} \boldsymbol{\phi}_r \eta_r(t)$$

Ustálená odezva netlumené soustavy na harmonické buzení $p(t) = \bar{P} \cos(\Omega t)$

Modální zatížení $P(t) = (\Phi^T \bar{P}) \cos(\Omega t)$ nebo $P_r(t) = F_r \cos(\Omega t)$, kde $F_r = \phi_r^T \bar{P}$

Při užití vztahu pro soustavu s 1 SV $u_p = \left(\frac{U_0}{1 - r^2} \right) \cos(\Omega t)$, kde $U_0 = \frac{p_0}{k}$

$$\eta_r(t) = \left(\frac{F_r}{K_r} \right) \left[\frac{1}{1 - (\Omega/\omega_r)^2} \right] \cos(\Omega t)$$

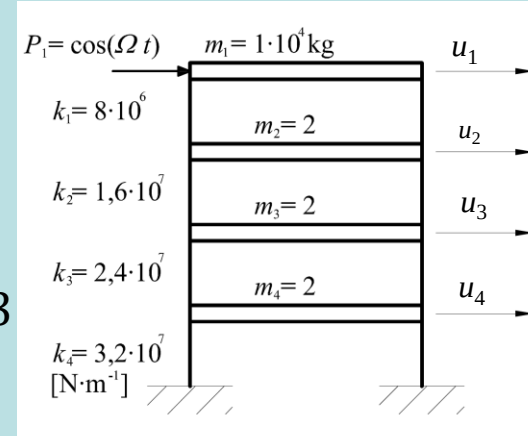
Po zpětné transformaci – dosazení $\eta_r(t)$ do $\hat{u}(t) = \hat{\Phi} \hat{\eta}(t) = \sum_{r=1}^{\hat{N}} \phi_r \eta_r(t)$

$$\hat{u}(t) = \sum_{r=1}^{\hat{N}} \phi_r \left(\frac{F_r}{K_r} \right) \left[\frac{1}{1 - (\Omega/\omega_r)^2} \right] \cos(\Omega t) \quad - \text{ustálená odezva bez útlumu}$$

Příklad: Čtyřpatrová budova je modelována jako rovinná konstrukce s ohybově poddajnými sloupy. Harmonická budící síla $P_1 \cos(\Omega t)$ působí v úrovni střechy

Určete:

- Modální hmotnosti M_r a modální tuhosti K_r
- Modální síly $F_r(t)$
- Výraz pro ustálenou odezvu $\eta_r(t)$
- Výraz pro $\hat{u}_1(t)$
- Vytvořte tabulku ampl. funkce $\hat{u}_1(t)$ při $\hat{N} = 1$, $\hat{N} = 2$ a $\hat{N} = 3$ pro budící frekvence $\Omega = 0$, $\Omega = 0,5\omega_1$ a $\Omega = 1,3\omega_3$ a určete $u_1(t)$ při $N = 4$
- Proveďte rozbor řešení



Je dáno: Matice tuhostí konstrukce

$$\mathbf{k} = 8 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Matice hmotností konstrukce

$$\mathbf{m} = 1 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla zobecněné úlohy

$$\omega^2 = \begin{Bmatrix} 0,17672 \\ 0,87970 \\ 1,68746 \\ 3,12279 \end{Bmatrix} 10^3$$

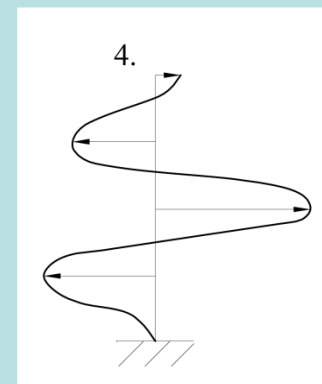
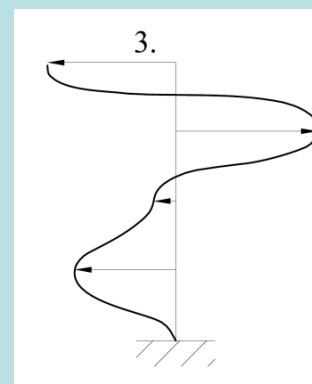
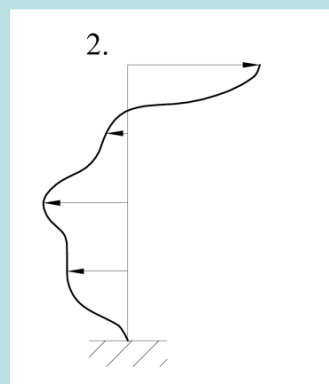
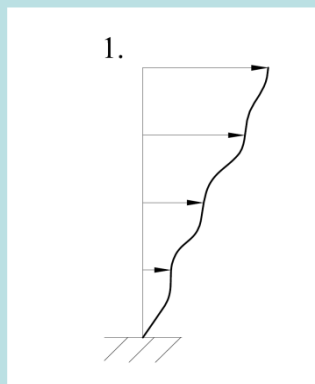
Vlastní vektory (tvary kmitu)

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1,00000 & 1,00000 & -0,90145 & 0,15436 \\ 0,77910 & -0,09963 & 1,00000 & -0,44817 \\ 0,49655 & -0,53989 & -0,15859 & 1,00000 \\ 0,23506 & -0,43761 & -0,70797 & -0,63688 \end{bmatrix}$$

Vlastní úhlové frekvence

$$\omega = \begin{Bmatrix} 13,294 \\ 29,660 \\ 41,079 \\ 55,882 \end{Bmatrix}$$

Vlastní tvary kmitu



Řešení:

$$f_1 = 2,116 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 4,714 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 6,538 \text{ Hz}$$

$$f_4 = 8,894 \text{ Hz}$$

a) Výpočet modálních hmotností a modálních tuhostí

$$M_r = \Phi_r^T \mathbf{m} \Phi_r \quad \text{a} \quad K_r = \omega_r^2 M_r$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1,00000 \\ 0,77910 \\ 0,49655 \\ 0,23506 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1,00000 \\ 0,77910 \\ 0,49655 \\ 0,23506 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} M_1 &= 2,97288 \cdot 10^4 \\ M_2 &= 2,17732 \cdot 10^4 \\ M_3 &= 4,36653 \cdot 10^4 \\ M_4 &= 2,97288 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

$$K_1 = \omega_1^2 M_1 = 507,695 \cdot 10^4 \quad K_3 = \omega_3^2 M_3 = 7368,43 \cdot 10^4$$

$$K_2 = \omega_2^2 M_2 = 1915,39 \cdot 10^4 \quad K_4 = \omega_4^2 M_4 = 11374,4 \cdot 10^4$$

b) Výpočet modálních sil

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow F_r = \boldsymbol{\phi}_r^T \bar{\mathbf{p}} \Rightarrow F_1 = P_1, \quad F_2 = P_1, \quad F_3 = -0,90145 P_1 \quad \text{a} \quad F_4 = 0,15436 P_1$$

c) Jedná se o harmonické buzení $\eta_r(t) = \frac{(F_r/K_r) \cos(\Omega t)}{(1 - r_r^2)}$, kde $r_r = \frac{\Omega}{\omega_r}$

d) Hledaná aproximace $\hat{u}_1(t)$ (v posunutích)

$$\hat{u}_1(t) = \sum_{r=1}^{\hat{N}} (\boldsymbol{\phi}_1)_r \eta_r(t)$$

$$u_1(t) = \left[\begin{aligned} &\frac{1,0 \cdot P_1 \cos(\Omega t)}{507,695 \cdot 10^4 [1 - \Omega^2/176,72]} \\ &+ \frac{1,0 \cdot P_1 \cos(\Omega t)}{1915,39 \cdot 10^4 [1 - \Omega^2/879,70]} \\ &+ \frac{-0,90145 \cdot (-0,90145) \cdot P_1 \cos(\Omega t)}{7368,43 \cdot 10^4 [1 - \Omega^2/1687,46]} \\ &+ \frac{0,15436 \cdot 0,15436 \cdot P_1 \cos(\Omega t)}{11374,4 \cdot 10^4 [1 - \Omega^2/3122,79]} \end{aligned} \right] \begin{matrix} \hat{N} = 1 \\ \hat{N} = 2 \\ \hat{N} = 3 \end{matrix}$$

e) Výraz pro všechny tvary kmitu $u_1(t)$

Konstanta c ve výrazu $u_1(t) = cP_1 \cos(\Omega t)$, viz tabulka

	$\hat{N} = 1$	$\hat{N} = 2$	$\hat{N} = 3$	$\hat{N} = 4$
$\Omega = 0$	$1,970 \cdot 10^{-7}$	$2,492 \cdot 10^{-7}$	$2,602 \cdot 10^{-7}$	$2,604 \cdot 10^{-7}$
$\Omega = 0,5\omega_1$	$2,626 \cdot 10^{-7}$	$3,176 \cdot 10^{-7}$	$3,289 \cdot 10^{-7}$	$3,290 \cdot 10^{-7}$
$\Omega = 1,3\omega_3$	$-1,301 \cdot 10^{-8}$	$-3,630 \cdot 10^{-8}$	$-5,228 \cdot 10^{-8}$	$-4,987 \cdot 10^{-8}$

f) **Závěry**

Při užití pouze jednoho tvaru kmitu pro žádnou budící frekvenci nebyla získána dostatečně přesná aproximace řešení.
 Při užití tří tvarů kmitu bylo získáno prakticky přesné řešení pro $\Omega = 0$ a $\Omega = 0,5\omega_1$.
 Protože budící frekvence $\Omega = 1,3\omega_3$ vlastní frekvenci ω_4 není možné získat věrohodné řešení při menším počtu tvarů

Modální statická výchylka $D_r = \frac{F_r}{K_r} = \frac{\boldsymbol{\phi}_r^T \overline{\mathbf{P}}}{K_r}$

hraje stejnou roli jako statické přemístění U_0 u jednostupňových soustav

Příklad: Pro čtyřpatrovou budovu řešenou v předchozím příkladu se má vyčíslit

F_r a D_r pro dva případy zatížení $\overline{\mathbf{p}}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, a $\overline{\mathbf{p}}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Řešení: S využitím tvarů kmitu

$$F_{1a} = \boldsymbol{\phi}_1^T \overline{\mathbf{p}}_a = \begin{pmatrix} 1,00000 \\ 0,77910 \\ 0,49655 \\ 0,23506 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,00000, \quad F_{2b} = \boldsymbol{\phi}_1^T \overline{\mathbf{p}}_a = \begin{pmatrix} 1,00000 \\ 0,77910 \\ 0,49655 \\ 0,23506 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,51071 \quad \text{atd.}$$

Modální síly

$$\begin{aligned} F_{1a} &= 1,00000 & F_{1b} &= 2,51071 \\ F_{2a} &= 1,00000 & F_{2b} &= -0,07713 \\ F_{3a} &= -0,90145 & F_{3b} &= -0,76801 \\ F_{4a} &= 0,15436 & F_{4b} &= 0,06931 \end{aligned}$$

Výpočet modálních výchylek $D_r = \frac{F_r}{K_r}$

$$\begin{aligned} D_{1a} &= 1,9697 \cdot 10^{-7} & D_{1b} &= 4,9453 \cdot 10^{-7} \\ D_{2a} &= 5,2209 \cdot 10^{-8} & D_{2b} &= -0,4027 \cdot 10^{-8} \\ D_{3a} &= -1,2234 \cdot 10^{-8} & D_{3b} &= -1,0423 \cdot 10^{-8} \\ D_{4a} &= 1,3571 \cdot 10^{-9} & D_{4b} &= 0,6094 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

Tvar kmitu společně s rozdělením sil určuje hodnotu F_r
 V případě, že tvary jsou normovány vzhledem k 1, potom tuhost vzrůstá s číslem tvaru

Řešení odezvy netlumené soustavy rozkladem podle tvarů kmitu ve zrychleních

Při řešení v přemístěních - nedostatky:

Řešení selhává v případě statického zatížení

Konvergence ke správnému řešení je obvykle pomalá

Řešení ve zrychleních - nedostatky odstraňuje

Soustava pohybových rovnic $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$ je přepsána $\mathbf{u} = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{p}(t) - \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}})$

Člen $\ddot{\mathbf{u}}$ lze aproximovat pomocí $\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}$ obdobně jako $\mathbf{u}$ řešení v přemístěních

Aproximace $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{p}(t) - \mathbf{m}\ddot{\tilde{\mathbf{u}}})$. S využitím vztahu

$$\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}(t) = \sum_{r=1}^{\hat{N}} \boldsymbol{\phi}_r \ddot{\eta}_r(t), \text{ aproximace } \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{p}(t) - \mathbf{k}^{-1} \sum_{r=1}^{\hat{N}} \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r \ddot{\eta}_r$$

Vzhledem ke vztahu $(\mathbf{k} - \omega_r \mathbf{m})\boldsymbol{\phi}_r = 0$, kde $r = 1, \dots, N \Rightarrow$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{p}(t) - \sum_{r=1}^{\hat{N}} \left(\frac{1}{\omega_r^2} \right) \boldsymbol{\phi}_r \ddot{\eta}_r$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{k}^{-1} \mathbf{p}(t) - \sum_{r=1}^{\hat{N}} \left(\frac{1}{\omega_r^2} \right) \boldsymbol{\phi}_r \ddot{\eta}_r$$

První člen v rovnici představuje pseudostatickou odezvu
Druhý člen v rovnici dává uvedené variantě název
(řešení ve zrychleních)

Člen ω_r^2 ve jmenovateli zvyšuje rychlost konvergence variantě řešení v přemístěních

Příklad: Zadání je shodné s předchozím příkladem

Určete:

a) Výraz pro $\tilde{u}_1(t)$

b) Vytvořte tabulku amplitud funkce $\tilde{u}_1(t)$ při $\hat{N} = 1$, $\hat{N} = 2$ a $\hat{N} = 3$ pro budicí frekvence $\Omega = 0$, $\Omega = 0,5\omega_1$ a $\Omega = 1,3\omega_3$, určete $u_1(t)$ při $N = 4$, porovnejte s řešením při $N = 4$ a s předchozí variantou řešení

c) Proved'te rozbor řešení

Matice $\mathbf{a}$ inverzní k matici tuhosti $\mathbf{a} \equiv \mathbf{k}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,60417 & 1,35417 & 0,72717 & 0,31250 \\ 1,35417 & 1,35417 & 0,72717 & 0,31250 \\ 0,72717 & 0,72717 & 0,72717 & 0,31250 \\ 0,31250 & 0,31250 & 0,31250 & 0,31250 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7}$

Řešení:

$$a) \tilde{u}_1(t) = a_{11} P_1 \cos(\Omega t) - \sum_{r=1}^{\hat{N}} \left(\frac{1}{\omega_r^2} \right) (\phi_1)_r \ddot{\eta}_r$$

$$\text{Dále } \eta_r(t) = \left(\frac{F_r}{K_r} \right) \left[\frac{1}{1 - (\Omega/\omega_r)^2} \right] \cos(\Omega t). \text{ Z čehož plyne, že } \ddot{\eta}_r(t) = \Omega^2 \eta_r(t)$$

Po dosazení do výchozí rovnice

$$\tilde{u}_1(t) = a_{11} p_1 \cos(\Omega t) + \sum_{r=1}^{\hat{N}} \left(\frac{\Omega^2}{\omega_r^2} \right) (\phi_1)_r \eta_r$$

Potom

$$u_1(t) = 2,60417 \cdot 10^{-7} P_1 \cos(\Omega t) + \frac{(\Omega^2/176,72) \cdot 1,0 \cdot P_1 \cos(\Omega t)}{507,695 \cdot 10^4 [1 - (\Omega^2/176,72)]} + \frac{(\Omega^2/879,70) \cdot 1,0 \cdot P_1 \cos(\Omega t)}{1915,39 \cdot 10^4 [1 - (\Omega^2/879,70)]} + \frac{(\Omega^2/1687,46) \cdot (-0,90145) \cdot (-0,90145) \cdot P_1 \cos(\Omega t)}{7368,43 \cdot 10^4 [1 - (\Omega^2/1687,46)]} + \frac{(\Omega^2/3122,79) \cdot 0,15436 \cdot 0,15436 P_1 \cos(\Omega t)}{11374,4 \cdot 10^4 [1 - (\Omega^2/3122,79)]} \left[\begin{array}{l} \hat{N} = 1 \\ \hat{N} = 2 \\ \hat{N} = 3 \end{array} \right]$$

b) Konstanta c ve výrazu $u_1(t) = cP_1 \cos(\Omega t)$, viz tabulka

	$\hat{N} = 1$	$\hat{N} = 2$	$\hat{N} = 3$	$\hat{N} = 4$
$\Omega = 0$	$2,604 \cdot 10^{-7}$	$2,604 \cdot 10^{-7}$	$2,604 \cdot 10^{-7}$	$2,604 \cdot 10^{-7}$
$\Omega = 0,5\omega_1$	$3,261 \cdot 10^{-7}$	$3,288 \cdot 10^{-7}$	$3,291 \cdot 10^{-7}$	$3,291 \cdot 10^{-7}$
$\Omega = 1,3\omega_3$	$5,044 \cdot 10^{-8}$	$-2,506 \cdot 10^{-8}$	$-5,207 \cdot 10^{-8}$	$-4,987 \cdot 10^{-8}$

c) Závěry

- 1) Přesné statické řešení lze získat při $\Omega = 0$ bez uvažování tvarů kmitu.
- 2) Pro nízkou frekvenci $0,5\omega_1$ stačí pouze jeden člen řady pro získání uspokojivého řešení - po přidání dalších členů přesnost aproximace prudce vzrůstá.
- 3) Protože budící frekvence $\Omega = 1,3\omega_3$ je blízká vlastní frekvenci ω_4 není opět možné získat věrohodné řešení při menším počtu tvarů.

Rovnice $\eta_r(t) = \eta_r(0) \cos(\omega_r t) + \left(\frac{1}{\omega_r}\right) \dot{\eta}_r(0) \sin(\omega_r t) + \left(\frac{1}{M_r \omega_r}\right) \int_0^t P_r(\tau) \sin[\omega_r(t - \tau)] d\tau$

může být použita pro výpočet $\ddot{\eta}_r(t)$

Rovnice pro $\ddot{\eta}_r = -\omega_r^2 \eta_r(0) \cos(\omega_r t) - \omega_r \dot{\eta}_r(0) \sin(\omega_r t) + \frac{P_r(t)}{M_r} - \frac{\omega_r}{M_r} \int_0^t P_r(\tau) \sin[\omega_r(t - \tau)] d\tau$

může být upravena integrací po částech (per partes) na konečný tvar

$$\ddot{\eta}_r = -\omega_r^2 \eta_r(0) \cos(\omega_r t) - \omega_r \dot{\eta}_r(0) \sin(\omega_r t) + \frac{1}{M_r} \left\{ P_r(0) \cos(\omega_r t) + \int_0^t \frac{d}{d\tau} [P_r(\tau)] \cos[\omega_r(t - \tau)] d\tau \right\}$$

Řešení rovnic se zpravidla provádí numericky

Výpočtový postup ukázal na možnost pracovat pouze s $\hat{N}$ vlastními frekvencemi a odpovídajícími vlastními tvary kmitu – takto se často postupuje u praktických úloh
Důležitý krok je výběr počtu frekvencí a tvarů – vyžaduje se min. 90% kmitající hmoty

Řešení rozkladem podle vlastních tvarů kmitu viskózně tlumených soustav

Popisuje se metoda rozkladu podle vlastních tvarů kmitu při řešení odezvy soustav s viskózním modelem tlumení - soustava modálních pohybových rovnic je opět vzájemně nevázaná.

Speciální pozornost je věnována odezvě na **harmonické buzení** - tato odezva hraje důležitou roli při návrhu a posouzení konstrukcí zatížených rotujícími účinky strojů, buzením větrem, dopravním proudem (chodci) apod.

Pohybové rovnice v modálních souřadnicích popisující soustavu s mnoha stupni volnosti

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{P}(t)$$

Předpokládá se, že soustava je tlumená – viskózní model tlumení

Matice tlumení $\mathbf{c}$ je taková, že platí $\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{c} \boldsymbol{\phi}_s = 0$ pro $r \neq s$

$$\ddot{\eta}_r + 2\zeta_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \left(\frac{1}{M_r} \right) P_r(t), \quad \spadesuit \text{ pro } r = 1, 2, \dots, N$$

Potom soustava pohybových rovnic je soustavou vzájemně nevázaných rovnic
Soustava rovnic může být zapsána (jednostupňové soustavy v modálních souřadnicích),
kde ζ_r je modální tlumicí faktor (modální tlumení)

Lze jej vyčíslit ze vztahu

$$\zeta_r = \frac{C_r}{2M_r \omega_r} = \left(\frac{1}{2M_r \omega_r} \right) \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{c} \boldsymbol{\phi}_r$$

Řešení rovnic $\spadesuit$ se provádí stejným způsobem jako u jednostupňové soustavy

$$\eta_r(t) = \left(\frac{1}{M_r \omega_{dr}} \right) \int_0^t P_r(\tau) e^{-\zeta_r \omega_r (t-\tau)} \sin[\omega_{dr}(t-\tau)] d\tau + \eta_r(0) e^{-\zeta_r \omega_r t} \cos(\omega_{dr} t) + \\ + \left(\frac{1}{\omega_{dr}} \right) [\dot{\eta}_r(0) + \zeta_r \omega_r \eta_r(0)] e^{-\zeta_r \omega_r t} \sin(\omega_{dr} t), \quad (\text{Duhamelův integrál})$$

kde $\omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}$ - vlastní úhlová frekvence tlumené soustavy

Po vyřešení N modálních rovnic $\spadesuit$ se provede zpětná substituce do rovnice

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\phi}_r \eta_r(t)$$

Je-li použito pouze $\hat{N}$ tvarů (řešení v přemístěních), potom řešení úplně ignoruje vliv tvarů $\hat{N} + 1$ až N

V případě řešení ve zrychleních se vychází z rovnice

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}^{-1}[\mathbf{p}(t) - \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}]$$

Potom aproximace řešení

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{p}(t) - \mathbf{k}^{-1}\mathbf{c} \sum_{r=1}^{\hat{N}} \boldsymbol{\phi}_r \dot{\eta}_r(t) - \mathbf{k}^{-1}\mathbf{m} \sum_{r=1}^{\hat{N}} \left(\frac{1}{\omega_r^2}\right) \boldsymbol{\phi}_r \ddot{\eta}_r(t)$$

Metoda rozkladu podle vlastních tvarů kmitu v případě výpočtu ustálené odezvy viskózně tlumené soustavy harmonicky buzené silou $\mathbf{p}(t) = \bar{\mathbf{P}} \cos(\Omega t)$

V tomto případě $\ddot{\eta}_r + 2\zeta_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \left(\frac{1}{M_r}\right) F_r \cos(\Omega t)$

kde F_r se určí ze vztahu $F_r = \boldsymbol{\phi}_r^T \bar{\mathbf{P}}$ $\spadesuit$

Stejně jako v případě soustavy s 1 SV, lze získat řešení v komplexních číslech

$$\bar{\ddot{\eta}}_r + 2\zeta_r \omega_r \bar{\dot{\eta}}_r + \omega_r^2 \bar{\eta}_r = \omega_r^2 \left(\frac{F_r}{K_r}\right) e^{i\Omega t}$$

Ustálený stav $\bar{\eta}_r$ lze vyčíslit ze vztahu

$$\bar{\eta}_r = \bar{H}_{\eta_r/F_r}(\Omega) F_r e^{i\Omega t} \quad \clubsuit$$

kde $\bar{H}_{\eta_r/F_r}(\Omega)$ je funkce komplexní frekvenční odezvy pro hlavní souřadnice

$$\bar{H}_r(\Omega) = \bar{H}_{\eta_r/F_r}(\Omega) = \frac{1/K_r}{(1 - r_r^2) + i(2\zeta_r r_r)} \quad \heartsuit$$

Obdobně jako dříve u jednostupňových soustav

$$\eta_r(t) = \frac{F_r/K_r}{\sqrt{(1 - r_r^2)^2 + (2\zeta_r r_r)^2}} \cos(\Omega t - \alpha_r), \text{ kde } \tan \alpha_r = \frac{2\zeta_r r_r}{1 - r_r^2}$$

Komplexní frekvenční odezva $\mathbf{u}$ ve fyzických (zobecněných) souřadnicích v komplexním vyjádření

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \Phi \bar{\boldsymbol{\eta}}(t) = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\phi}_r \bar{\eta}_r(t) \quad \text{je funkce komplexní frekvenční odezvy pro hlavní souřadnice}$$

Po dosazení rovnice $\clubsuit$, $\spadesuit$ a $\heartsuit$, pro fyzické souřadnice máme rovnici pro odezvu u_i

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\boldsymbol{\phi}_r \boldsymbol{\phi}_r^T \bar{\mathbf{P}}}{K_r} \right) \left[\frac{1}{(1 - r_r^2) + i(2\zeta_r r_r)} \right] e^{i\Omega t}$$

Funkce komplexní frekvenční odezvy $\bar{H}_{ij}(\Omega)$ pro fyzické souřadnice na jednotkové harmonické buzení p_j

$$\bar{H}_{ij}(\Omega) = \bar{H}_{u_i/p_j}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{(\phi_i)_r (\phi_j)_r}{K_r} \right] \left[\frac{1}{(1 - r_r^2) + i(2\zeta_r r_r)} \right]$$

Ustálená odezva $\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\boldsymbol{\phi}_r \boldsymbol{\phi}_r^T \bar{\mathbf{P}}}{K_r} \right) \left[\frac{1}{\sqrt{(1-r_r^2)^2 + (2\zeta_r r_r)^2}} \right] \cos(\Omega t - \alpha_r) ,$$

kde α_r se určí z rovnice $\tan \alpha_r = \frac{2\zeta_r r_r}{1-r_r^2}$

Graf funkce $\bar{H}_{ij}(\Omega)$ v komplexní rovině se nazývá grafem komplexní frekvenční odezvy
V tomto případě Ω je parametr a složka $I(\bar{H})$ je vykreslována vzhledem k $R(\bar{H})$

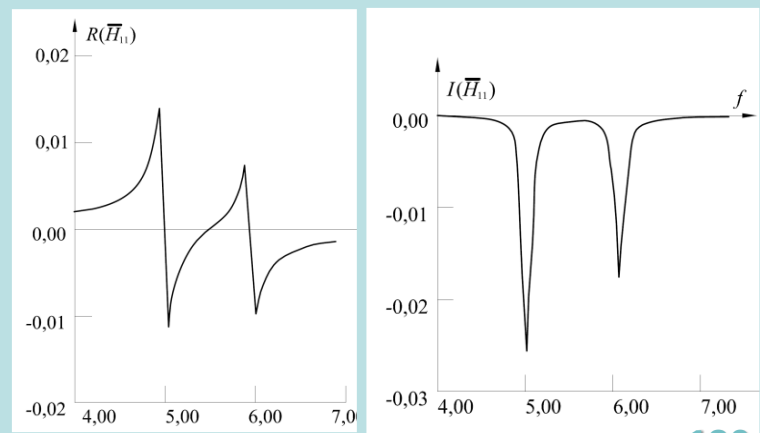
$$R(\bar{H}_{ij}) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{(\phi_i)_r (\phi_j)_r}{K_r} \right] \left[\frac{(1-r_r^2)}{(1-r_r^2)^2 + (2\zeta_r r_r)^2} \right]$$

a

$$I(\bar{H}_{ij}) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{(\phi_i)_r (\phi_j)_r}{K_r} \right] \left[\frac{-2\zeta_r r_r}{(1-r_r^2)^2 + (2\zeta_r r_r)^2} \right]$$

Někdy se zobrazuje $R(\bar{H})$ a $I(\bar{H})$ vzhledem k $f = \frac{\Omega}{2\pi}$

Funkce frekvenční komplexní odezvy se nazývá také přenosová funkce
a často se využívá pro určování vibračních charakteristik při experimentu



Dynamická napjatost v případě metody rozkladu podle tvarů kmitu

Metoda rozkladu podle vlastních tvarů kmitu byla aplikována pro určení časové odezvy funkce přemístění $u(t)$ – jednoduše se dají určit derivace dle času (rychlost a zrychlení). V dynamické analýze se často vyžaduje určit časový průběh napjatosti (moment, posouvající síla, normálové a smykové napětí apod.) nebo extrémní hodnoty napětí v určitých místech konstrukce.

Symbolicky lze napjatost získanou metodou rozkladu podle vlastních tvarů kmitu v přemístěních vyjádřit takto:

$$\hat{\sigma}(t) = \sum_{r=1}^{\hat{N}} \mathbf{S}_r \eta_r(t)$$

kde $\mathbf{S}_r$ je příspěvek do vektoru napětí σ od r -tého tvaru kmitu při $\eta_r = 1$

V případě řešení ve zrychleních

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma_{ps} - \sum_{r=1}^{\hat{N}} \left(\frac{1}{\omega_r^2} \right) \mathbf{S}_r \ddot{\eta}_r(t)$$

kde index ps označuje pseudostatické řešení

Řešení ve zrychleních je výhodnější vůči řešení v přemístěních z hlediska rychlosti konvergence

Příklad:

Pro řešený příklad čtyřpodlažní budovy se mají určit výrazy pro příčné síly σ_i na úrovni jednotlivých podlaží odpovídající r -tému tvaru kmitu.

Řešení: Z relativních posunutí jednotlivých podlaží - napjatosti

$$\sigma_1 = k_1(u_1 - u_2), \sigma_2 = k_2(u_2 - u_3), \sigma_3 = k_3(u_3 - u_4) \text{ a } \sigma_4 = k_4(u_4 - u_0)$$

Maticově

Pro r -tý tvar kmitu platí

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, \quad S_r = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix}_r = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}_r$$

Pro hodnoty $\mathbf{k}$ a Φ z uvedeného příkladu

$$S_1 = \begin{Bmatrix} 176,72 \\ 452,08 \\ 627,58 \\ 752,19 \end{Bmatrix} \cdot 10^4, \quad S_2 = \begin{Bmatrix} 879,70 \\ 704,42 \\ -254,47 \\ -1400,35 \end{Bmatrix} \cdot 10^4, \quad S_3 = \begin{Bmatrix} -1521,16 \\ 1853,74 \\ 1318,51 \\ -2265,50 \end{Bmatrix} \cdot 10^4 \text{ a } S_4 = \begin{Bmatrix} 482,02 \\ -2317,17 \\ 3928,51 \\ -2038,02 \end{Bmatrix} \cdot 10^4$$

Hodnoty modálních sil vzrůstají s číslem tvaru kmitu - z tohoto důvodu konvergence hodnot napjatosti je pomalejší než konvergence hodnot přemístění

Proto se při určování napjatosti s výhodou se využívá metoda rozkladu podle tvarů kmitu ve zrychleních

Závěrečná poznámka k metodě rozkladu podle vlastních tvarů kmitů

Metodu rozkladu podle tvarů kmitu nelze použít pro řešení úloh, kdy matice $\mathbf{k}$ a $\mathbf{m}$ se mění v čase (materiálová a geometrická nelinearita), změna okrajových podmínek (kontaktní úloha) a v případě neproporcionálního útlumu

Metody přímé integrace při řešení dynamické odezvy

Útlum mnohostupňových soustav

Při řešení odezvy rozkladem podle vlastních tvarů kmitu byl uvažován speciální případ viskózního tlumení - tlumení vyhovovalo rovnici ortogonalit

$$\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{c} \boldsymbol{\phi}_s = 0, \text{ pro } r \neq s$$

Matice $\mathbf{c}$ je matice viskózního tlumení ve fyzických (nebo zobecněných) souřadnicích a $\boldsymbol{\phi}$ jsou vlastní tvary kmitu soustavy.

Vztah mezi modálním útlumem a útlumem v zobecněných souřadnicích

$$\zeta_r = \frac{C_r}{2M_r\omega_r} = \left(\frac{1}{2M_r\omega_r} \right) \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{c} \boldsymbol{\phi}_r$$

Modální faktory tlumení (modální útlum) ζ_r jsou závislé na tom jak kmitá konstrukce nebo její část – kmitání lze odečíst z tvaru kmitu.

Kmitá-li například v určitém tvaru ocelová část je možné odhadnou úroveň tlumení pro tento tvar kmitu.

U tvarů kdy kmitají části z různých materiálů je těžké určit úroveň tlumení – příklad blokového základu, který je uložen na antivibrační vrstvě v betonové vaně; vana leží na podzákladí – železobeton beton základu 5-7 %, antivibrační vrstva 16 %, žebet. vana 5-7 %, podzákladí 10-20 % je těžké naladit tlumení pro tvar kdy kmitají všechny části.

Uvedený typ tlumení je nazýván v literatuře jako ortogonální, klasický, modální nebo proporcionální útlum

Necht' $(\omega_r, \boldsymbol{\phi}_r)$ jsou vlastní dvojice vyhovující rovnicím

$$(\mathbf{k} - \omega_r^2 \mathbf{m}) \boldsymbol{\phi}_r = 0, \text{ pro } r = 1, 2, \dots, N$$

Platí podmínky ortogonality

$$\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_s = M_r \delta_{rs} \text{ a } \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_s = \omega_r^2 M_r \delta_{rs}, \text{ kde } \delta_{rs} \text{ je Kroneckerovo delta}$$

Podle definice Rayleighova útlumu

$$\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{c} \boldsymbol{\phi}_s = (\alpha + \beta \omega_r^2) M_r \delta_{rs}$$

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } r = s \\ 0 & \text{je-li } r \neq s \end{cases}$$

Dříve bylo definováno, že

$$C_r = \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{c} \boldsymbol{\phi}_r = 2M_r \omega_r \zeta_r$$

Kombinací posledních dvou rovnic

$$\zeta_r = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_r} + \beta \omega_r \right)$$

Parametry Rayleighova útlumu lze jednoduše určit na základě výběru dvou hodnot ζ_r odpovídající dvěma vybraným tvarům kmitu

Řešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých získáme parametry α a β

Člen $\alpha \mathbf{m}$ představuje inverzně proporcionální tlumení vzhledem k ω_r

Člen $\beta \mathbf{k}$ oproti tomu vede k lineárnímu nárůstu tlumení vzhledem k ω_r

Nevýhodou Rayleighova modelu tlumení je, že nezaručuje realistické tlumení všech uvažovaných tvarů kmitu

Existuje postup, jak zahrnout do matice tlumení vliv tlumení více tvarů

Platí

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{c} \mathbf{\Phi} = \text{diag}(2\zeta_r \omega_r M_r)$$

Potom

$$\mathbf{c} = \mathbf{\Phi}^{-T} \mathbf{C} \mathbf{\Phi}^{-1} \quad +$$

Protože modální matice $\mathbf{\Phi}$ je matice ortogonálních vektorů a platí $\mathbf{M} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{m} \mathbf{\Phi}$

Lze ukázat, že

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} = (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{m}) \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^{-1} \mathbf{\Phi}$$

Tedy

$$\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{m} \quad \#$$

Kombinací rovnic $+$ a $\#$

$$\mathbf{c} = (\mathbf{m} \mathbf{\Phi} \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{C} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{m})$$

Protože matice $\mathbf{M}$ a $\mathbf{C}$ jsou matice diagonální - potom

$$\mathbf{c} = \sum_{r=1}^N \left(\frac{2\zeta_r \omega_r}{M_r} \right) (\mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r) (\mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r)^T \quad \circ$$

V případě limitovaného počtu N_c tvarů kmitu odpovídajících nízkým frekvencím lze výše uvedenou rovnici upravit

$$\mathbf{c} = \sum_{r=1}^{N_c} \left(\frac{2\zeta_r \omega_r}{M_r} \right) (\mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r) (\mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r)^T$$

Tento postup vytváří matici tlumení $\mathbf{c}$, ve které není zahrnut vliv tlumení tvarů $(N_c + 1)$, $(N_c + 2), \dots, N$

Je možné modifikovat tuto rovnici tak, že tvary $r = 1, 2, \dots, N_c$ mají definovaný (zadaný) poměrný útlum a tvary $(N_c + 1), (N_c + 2), \dots, N$ mají tlumení větší než tvar N_c

To je možné za předpokladu, že

$$\mathbf{c} = \beta \mathbf{k} + \sum_{r=1}^{N_c-1} \left(\frac{2\hat{\zeta}_r \omega_r}{M_r} \right) (\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r)(\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r)^T, \quad \odot$$

kde

$$\beta = \frac{2\zeta_{N_c}}{\omega_{N_c}}, \quad \hat{\zeta}_r = \zeta_r - \zeta_{N_c} \left(\frac{\omega_r}{\omega_{N_c}} \right), \quad \zeta_s = \begin{cases} \text{zadané hodnoty, } s = 1, 2, \dots, N_c \\ \zeta_{N_c} \left(\frac{\omega_s}{\omega_{N_c}} \right), s = (N_c + 1), (N_c + 2), \dots, N \end{cases}$$

Přímá integrace pohybových rovnic vyžaduje použití fyzické matice tlumení $\mathbf{c}$

Pro aproximaci tlumení lze použít Rayleighův model tlumení $\bullet$, model zobecněného proporcionálního tlumení $\bullet$ nebo $\odot$

Příklad:

- Použijte rovnici $\odot$ pro určení matice tlumení ve fyzických souřadnicích pro případ čtyřpodlažní budovy (viz dříve řešený příklad) – dáno $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,01$
- Určete parametry tlumení ζ_3 a ζ_4

Řešení:

- Podle rovnice $\odot$ je pro $N_c = 2$

$$\mathbf{c} = \beta \mathbf{k} + \left(\frac{2\hat{\zeta}_1 \omega_1}{M_1} \right) (\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_1)(\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_1)^T, \text{ kde } \beta = \frac{2\zeta_2}{\omega_2} \quad \text{a} \quad \hat{\zeta}_1 = \zeta_1 - \zeta_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)$$

Číselně $\beta = \frac{2 \cdot 0,01}{29,660} = 6,7431 \cdot 10^{-4}$ a $\hat{\zeta}_1 = 0,01 - 0,01 \left(\frac{13,294}{29,660} \right) = 5,5179 \cdot 10^{-3}$

$$\mathbf{m}\phi_1 = 1 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,00000 \\ 0,77910 \\ 0,49655 \\ 0,23506 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,00000 \\ 1,55820 \\ 0,99310 \\ 0,70518 \end{Bmatrix} \cdot 10^4 \quad \text{a}$$

$$\mathbf{k} = 8 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Po dosazení do výrazu pro $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,59051 & -0,45988 & 0,05071 & 0,03601 \\ -0,45988 & 1,74233 & -0,99987 & 0,05611 \\ 0,05071 & -0,99987 & 2,74760 & -1,58258 \\ 0,03601 & 0,05611 & -1,58258 & 3,80153 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

b) Podle rovnice

$$\zeta_s = \zeta_2 \left(\frac{\omega_s}{\omega_2} \right) \quad \text{pro } s = 3, 4$$

Potom $\zeta_3 = 0,01 \cdot \frac{41,079}{29,660} = 0,0138$ a $\zeta_4 = 0,01 \cdot \frac{55,882}{29,660} = 0,0188$

Při řešení dynamické odezvy soustavy s 1SV byla uvedena kroková metoda – metoda přímé integrace pohybové rovnice

Existují obdobné postupy pro řešení soustav s konečným počtem stupňů volnosti

Základní myšlenka numerické integrace spočívá v tom, že řešení soustavy pohybových rovnic

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

se hledá pouze v konečném počtu časových okamžiků $t_0, t_1, \dots, t_N$ – řešení po krocích

Délka časového kroku je $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$

Na počátku řešení je nutno zohlednit počáteční podmínky $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ a $\dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0$

Předpokládá se, že jsou známa přibližná řešení v časech $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{i-1}$

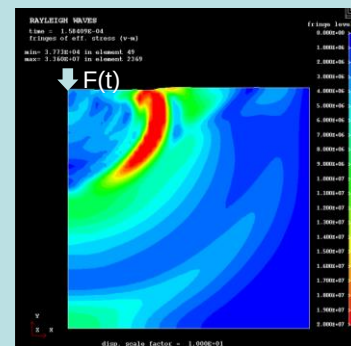
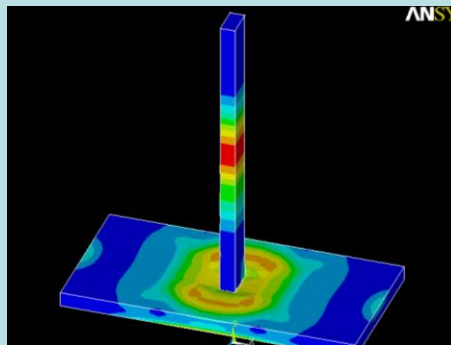
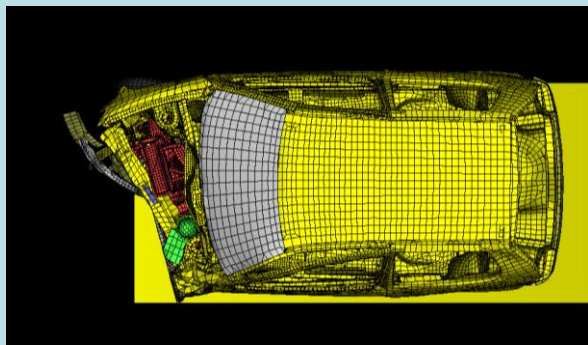
Hledá se přibližné řešení v čase t_i

Použitý postup řešení definuje metodu numerické integrace

Výběr metody numerické integrace ovlivňuje nároky na výpočet a přesnost řešení

Metody se dělí na **explicitní** a **implicitní**

Explicitní metody jsou vhodné pro řešení rychlých dynamických jevů – crash testy, návrh airbagů, výbuchy a rázy – krátká časová oblast – nelineární dynamika



Implicitní metody jsou vhodné pro řešení pomalých dynamických jevů – kmitání, lineární dynamika – dlouhá časová oblast

Diferenční metoda – patří mezi explicitní metody

Využívá náhrady derivací podle času konečnými diferencemi

Nechť t_{i+1} odpovídá časovému okamžiku $t + \Delta t$ a t_i časovému okamžiku t ,

přírůstek $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ je časovým krokem Δt

V případě nejjednodušší diferenční náhrady

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{t-\Delta t}),$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_{t-\Delta t}).$$

Po dosazení do soustavy pohybových rovnic $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{k}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t$ pro čas t

vznikne rovnice pro výpočet $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ v závislosti na hodnotách v předchozích dvou krocích

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{m} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{c} \right) \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{p}_t - \left(\mathbf{k} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{m} \right) \mathbf{u}_t - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{m} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{c} \right) \mathbf{u}_{t-\Delta t}$$

Výpočet se opakuje až po čas t_N , kdy je výpočet ukončen.

Diferenční metoda je výhodná, pokud je matice $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ nebo $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{m}$ a při diagonální matici hmotnosti $\mathbf{m}$.

Metoda je podmíněně stabilní.

Podmínka stability - délka zvoleného integračního kroku $\Delta t \leq \frac{T}{\pi}$,
kde T je nejmenší perioda kmitání soustavy.

Nevýhodou metody je, že v prvním kroku výpočtu je třeba použít speciální postup.

Newmarkova metoda - metoda konstantního (průměrného) zrychlení - implicitní metoda

Vztahy mezi přemístěním, rychlostí a zrychlením v čase t a $t + \Delta t$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \mathbf{u}_t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}_t + \alpha \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \\ \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{u}}_t [(1 - \delta) \ddot{\mathbf{u}}_t + \delta \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}] \Delta t \end{aligned} \right\} \quad \star$$

Parametry α a δ volíme tak, aby metoda byla stabilní

Při $\alpha = \frac{1}{4}$ a $\delta = \frac{1}{2}$ se jedná o metodu konstantního (průměrného) zrychlení

Soustava pohybových rovnic v čase $t + \Delta t$

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{k} \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{p}_{t+\Delta t}$$

Po dosazení rovnic $\star$ vznikne soustava algebraických rovnic pro výpočet $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$

$$(\mathbf{m} + \delta \Delta t \mathbf{c} + \alpha \Delta t^2 \mathbf{k}) \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = -\mathbf{k} \mathbf{u}_t - (\mathbf{c} + \Delta t \mathbf{k}) \dot{\mathbf{u}}_t - \left[(1 - \delta) \mathbf{c} + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \Delta t \mathbf{k} \right] \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_t$$

Vyčíslený vektor $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ zrychlení se dosadí do rovnic pro přemístění a rychlost.

Vypočtou se vektory přemístění $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ a rychlostí $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ a přejde se na další krok.

Je zřejmé, že není vhodné často měnit matici $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{m} + \delta \Delta t \mathbf{c} + \alpha \Delta t^2 \mathbf{k}$.

Toho lze dosáhnout, kdy $\mathbf{m}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{k}$ a Δt jsou konstantní – lineární úlohy dynamiky.

Metoda je jednoduchá a stabilní – velký integrační krok.

Wilsonova θ -metoda metoda lineárního zrychlení v rozšířeném intervalu $t, t + \theta\Delta t$ - implicitní metoda

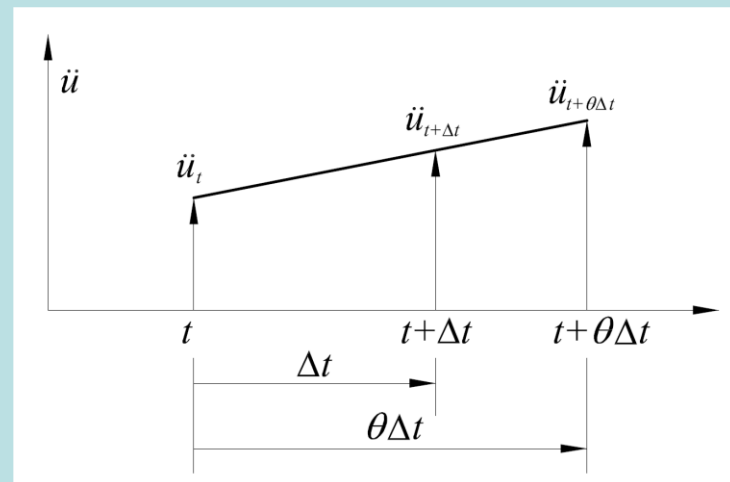
V libovolném časovém okamžiku platí

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\tau} = \ddot{\mathbf{u}}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t} (\ddot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{u}}_t). \quad \bullet$$

Po integraci

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\tau} = \dot{\mathbf{u}}_t + \tau \ddot{\mathbf{u}}_t + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} (\ddot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{u}}_t), \quad \bullet$$

$$\mathbf{u}_{t+\tau} = \mathbf{u}_t + \tau \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_t + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t} (\ddot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{u}}_t). \quad \bullet$$



Po dosazení za $\tau = \theta\Delta t$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\theta\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{\mathbf{u}}_t),$$

$$\mathbf{u}_{t+\theta\Delta t} = \mathbf{u}_t + \theta\Delta t \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6} (\ddot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{\mathbf{u}}_t). \quad \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \star$$

Obdobně jako v Newmarkově metodě je nutno rovnice $\star$ dosadit do pohybových rovnic, tentokrát pro $t + \theta\Delta t$

Vyčíslí se $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}$ - po dosazení do rovnic $\bullet$, $\bullet$ a $\bullet$ pro $\tau = \Delta t$ lze vypočítat $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ a $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ a přejde se na další krok

Stabilita a přesnost metody je závislá na výběru koeficientu θ .

Metoda je stabilní při $\theta \geq 1,37$ - používá se $\theta = 1,4$; optimální hodnota je $\theta = 1,420815$.

Vlastnosti krokových numerických integračních algoritmů – využití operátorů

Pohybová rovnice jednostupňové soustavy v čase t_{i+1} $m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1}$

Derivace podle času lze nahradit konečnými diferencemi

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{L}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad \text{a} \quad u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

Výše uvedené vztahy je možné zapsat maticově

$$\begin{bmatrix} k & c & m \\ 0 & 1 & \frac{-\Delta t_i}{2} \\ 1 & 0 & \frac{-\Delta t_i^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} \\ \ddot{u}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\Delta t_i}{2} \\ 1 & \Delta t_i & \frac{\Delta t_i}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \dot{u}_i \\ \ddot{u}_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_{i+1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{k}_1 \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_i + \mathbf{p}_{i+1}$$

Přímé řešení získáme po inverzi matice $\mathbf{k}_1$

$$\mathbf{L} = \mathbf{k}_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ m + \frac{c\Delta t_i}{2} + \frac{k\Delta t_i^2}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-\Delta t_i^2}{4} & \frac{c\Delta t_i}{4} & -\left(m + \frac{c\Delta t_i}{2}\right) \\ \frac{-\Delta t_i}{2} & -\left(m + \frac{k\Delta t_i^2}{4}\right) & \frac{k\Delta t_i}{2} \\ -1 & c & -k \end{bmatrix}$$

Součinitelé ξ a η

$$\xi = \frac{k\Delta t_i^2}{m} = \omega_n^2 \Delta t_i^2$$

$$\eta = \frac{c\Delta t_i}{m} = 2\zeta\omega_n \Delta t_i$$

Potom $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{u}_i + \mathbf{L}\mathbf{p}_{i+1}$, $\mathbf{F}_{i+1} \equiv \mathbf{L}\mathbf{p}_{i+1} =$

$$\text{kde} \quad \mathbf{A} = k_1^{-1}k_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \frac{\eta}{2} + \frac{\xi}{4} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\eta}{2}\right) & \Delta t_i \left(1 + \frac{\eta}{4}\right) & \frac{\Delta t_i^2}{4} \\ \frac{-\xi}{2\Delta t_i} & \left(1 - \frac{\xi}{4}\right) & \frac{\Delta t_i}{2} \mathbf{a} \\ \frac{-\xi}{\Delta t_i^2} & \frac{-(\xi + \eta)}{\Delta t_i} & -\left(\frac{\eta}{2} + \frac{\xi}{4}\right) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \frac{\eta}{2} + \frac{\xi}{4} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\Delta t_i^2}{4} \\ \frac{\Delta t_i}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{p_{i+1}}{m}\right)$$

Příklad:

Použijte metodu průměrného zrychlení pro získání vlastního kmitání netlumené soustavy o jednom stupni volnosti, kdy $k = 1$, $m = 1$, $u(0) = 1$ a $\dot{u}(0) = 0$.
Vyberte odpovídající integrační krok a proveďte integraci pro $0 \leq t \leq 2$ s.

Řešení:

Vlastní frekvence $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ a perioda $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi$

Volba časového kroku $\Delta t_i = 0,2$ s, krok je menší než $T_n/10$

Dále $\xi = \omega_n^2 \Delta t^2 = 1^2 0,2^2 = 0,04$, $\eta = 2\zeta \omega_n \Delta t = 0$, neboť $\zeta = 0$

Protože se jedná o volné kmitání $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{u}_i$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,99 & 0,20 & 0,01 \\ -0,01 & 0,98 & 0,10 \\ -0,99 & -0,20 & -0,01 \end{bmatrix}$

Pohybová rovnice $\ddot{u} + u = 0$ spolu s počátečními podmínkami $\mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \\ \ddot{u}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$
 $\ddot{u}(0)$ je určeno z pohybové rovnice

Přesné řešení úlohy je $u(t) = \cos(t)$

$$\mathbf{u}(0,2) = \mathbf{u}_1 = \mathbf{A}\mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 0,98020 \\ -0,19802 \\ -0,98020 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}(0,4) = \mathbf{u}_2 = \mathbf{A}\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} 0,92158 \\ -0,38820 \\ -0,92158 \end{Bmatrix} \quad \text{atd.}$$

i	t_i	$\ddot{u}_i$	$\dot{u}_i$	u_i	$\cos(t_i)$
0	0,0	-1,00000	0,00000	1,00000	1,00000
1	0,2	-0,98020	-0,19802	0,98020	0,98007
2	0,4	-0,92158	-0,38820	0,92158	0,92106
3	0,6	-0,82646	-0,56300	0,82646	0,82534
4	0,8	-0,69861	-0,71551	0,69861	0,69671
5	1,0	-0,54309	-0,83968	0,54309	0,54030
6	1,2	-0,36606	-0,93059	0,36606	0,36236
7	1,4	-0,17454	-0,98465	0,17454	0,16997
8	1,6	0,02390	-0,99971	-0,02390	-0,02920
9	1,8	0,22139	-0,97519	-0,22139	-0,22720
10	2,0	0,41011	-0,91204	-0,41011	-0,41615

Přesnost algoritmů

- v amplitudě (pokles amplitud)
- v periodě (protažení periody)

Stabilita algoritmů

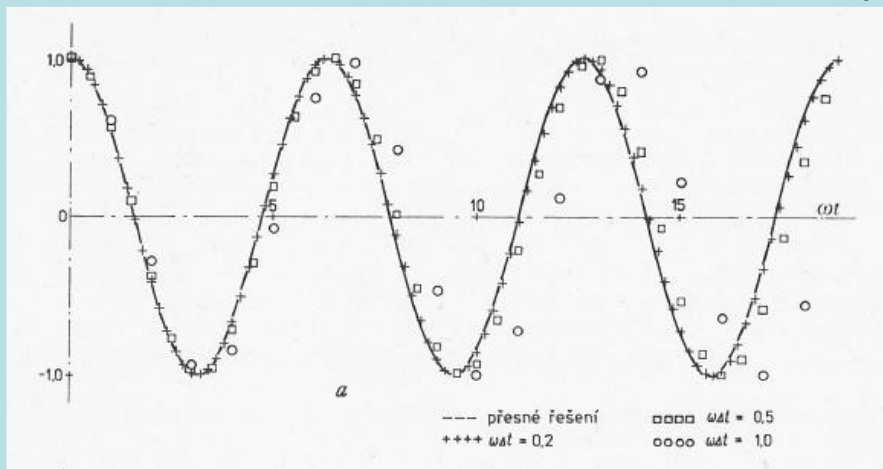
- podmíněně stabilní

$$\Delta t_i \leq \Delta t_{cr}$$

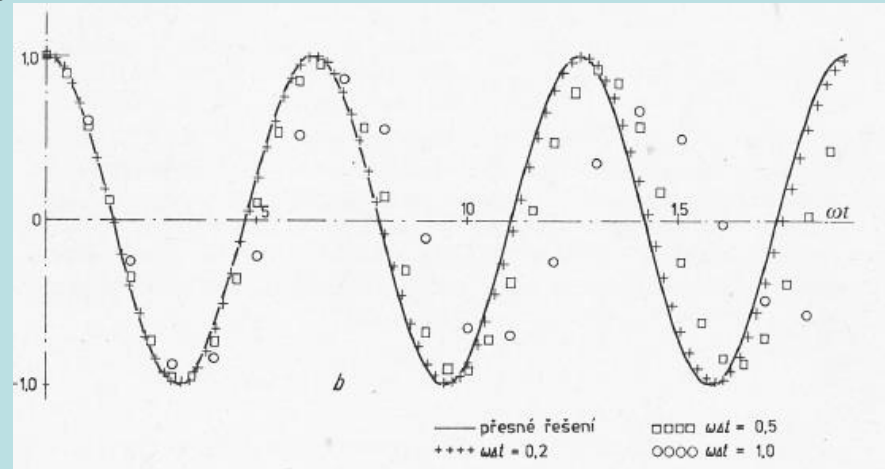
při větší hodnotě než je kritická, řešení se rozpadne

- nepodmíněně stabilní při velkém časovém kroku algoritmy fungují
- nárůst numerické chyby

Soustava s 1 SV – buzení počáteční výchylkou



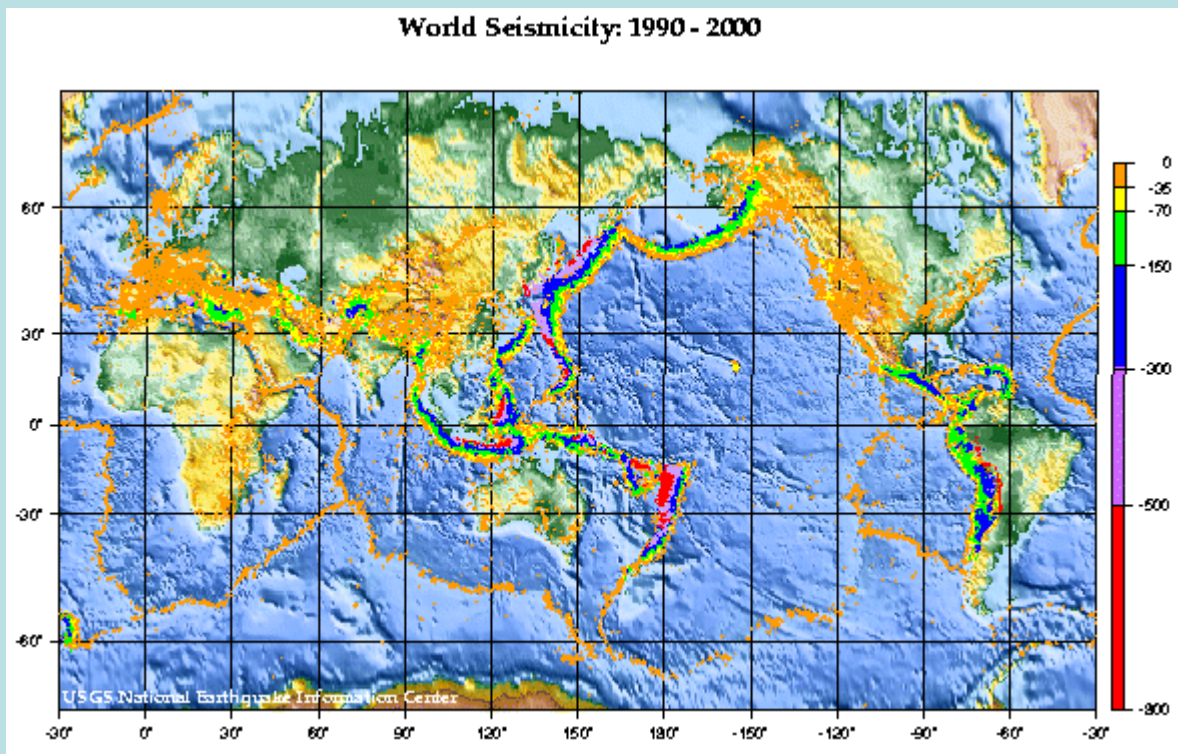
Newmarkova metoda



Wilsonova θ -metoda - $\theta = 1,4$

Dělení na **technickou** seizmicitu a **přírodní** seizmicitu

- Technická seizmicita vzniká jako následek působení člověka
- Přírodní seizmicita - nezávisle na působení člověka



Seismické oblasti světa mezi roky 1990 - 2000 s uvedenou hloubkou ohniska
Z obrázku je jasné, že ve většině oblastí vnikají otřesy v hloubkách do 70 km
Hlubší ohniska jsou vázána čistě na desková rozhranní, především subdukční zóny Tichého oceánu

(zdroj: <http://www.usgs.gov/>).

Charakteristiky

- intenzita zemětřesení
seismického zatížení
- velikost zemětřesení

Problémy při určování
seismického zatížení

- náhodnost buzení
- nelineární charakter buzení

Zrychlení - akcelerogramy

Rychlosti

Přemístění

Potřeba stanovení odezvy na
seismické buzení pro návrh
a posouzení

- stavebních objektů
- technologie

Intenzita zemětřesení je veličina, která je určována na základě pozorování **makroseizmických účinků** zemětřesení

Tyto zahrnují různé stupně poškození staveb, vznik prasklin a puklin v povrchu, případný pokles nebo vzestup terénu, sesuvy apod.

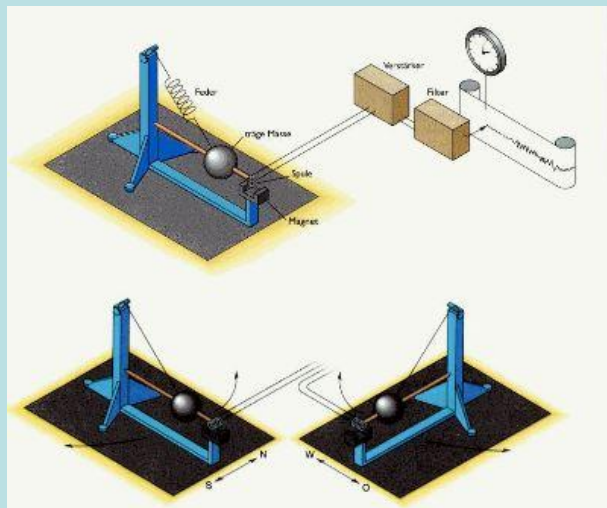
Intenzita je tedy čistě subjektivní veličina závislá na určení míry škod, které vznikly v souvislosti s otřesy

Její velikost je v každém místě pozorování odlišná a klesá se vzdáleností od epicentra

Popis stupnice MM (Modified Mercalli) s uvedeným zrychlením povrchu (BRÁZDIL, R., et al, 1988)

Stupeň	Označení	Zrychlení (mm.s ⁻²)	Popis
I.	nepozorovatelné	do 2,5	Člověk nerozpozná, pouze přístroje
II.	velmi slabé	2,5 - 5	Rozpoznatelné v horních patrech budov citlivými lidmi
II.	slabé	5 - 10	Vibrace, lustry se pohybují; srovnatelné s vibracemi způsobenými projíždějícím těžkým nákl. automobilem
IV.	mírné	10 - 25	Drnění oken, cinkot příborů a nádobí, zdi vydávají praskavé zvuky
V.	málo silné	25 - 50	Lze rozpoznat v krajině, probouzí spící, praskání oken, kyvadlové hodiny se mohou zastavit
VI.	silné	50 - 100	Vrávorání při chůzi, padají předměty, rozbíjí se nádobí, praskliny v omítce
VII.	velmi silné	100 - 250	Lze jen obtížně stát, zvony zvoní, trhliny ve zdech
VIII.	bořivé	250 - 500	Padají komíny, poškození budov, pohybující se těžký nábytek
IX.	pustošivé	500 - 1000	Panika, vážné poškození domů, větší trhliny v půdě
X.	ničivé	1000 - 2500	Zničené budovy, porušení přehrad, velké trhliny v půdě
XI.	katastrofické	2500 - 5000	Roztržení kolejí a potrubí, zničené mosty, změny terénu
XII.	globální	přes 5000	Velké předměty létají vzduchem, úplné zničení, rozsáhlé terénní změny

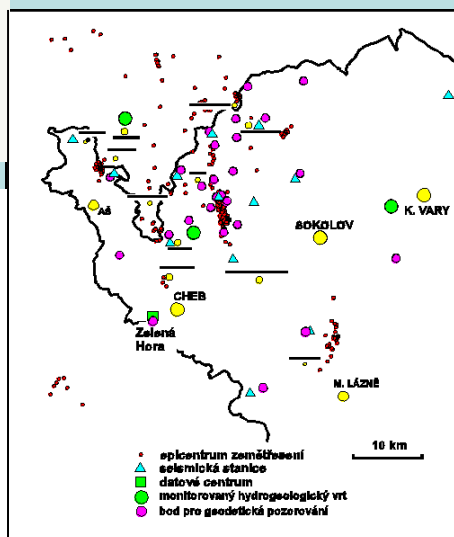
Velikost zemětřesení je objektivně změřitelnou veličinou



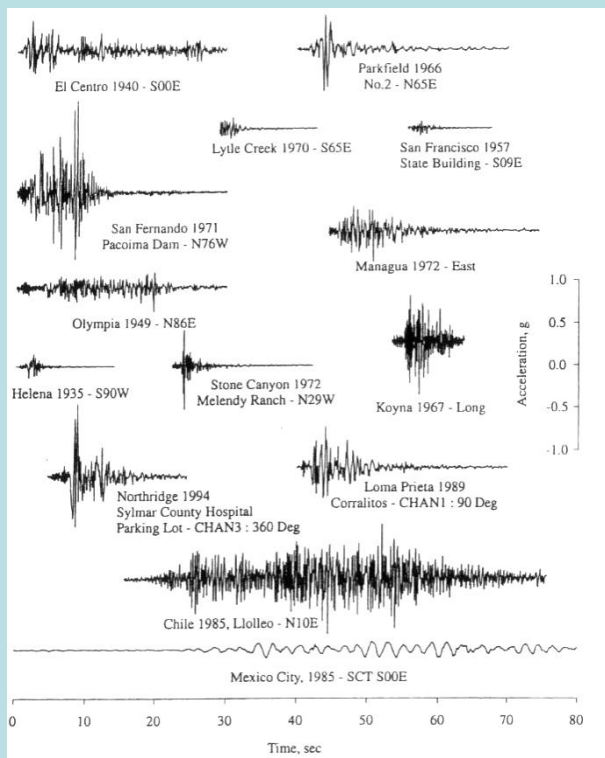
Vyobrazení stavby a funkce seismografu

<http://www.parautochthon.com/>

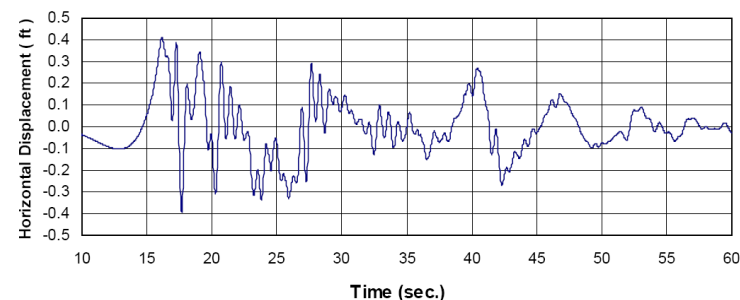
Přírodní seizmicita ČR



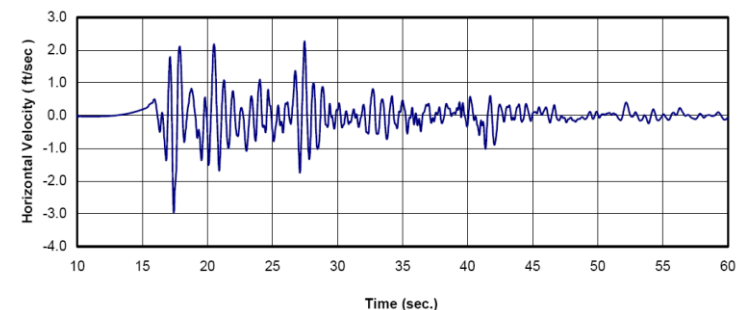
Technická seizmicita ČR Poddolované území – Sev. Morava



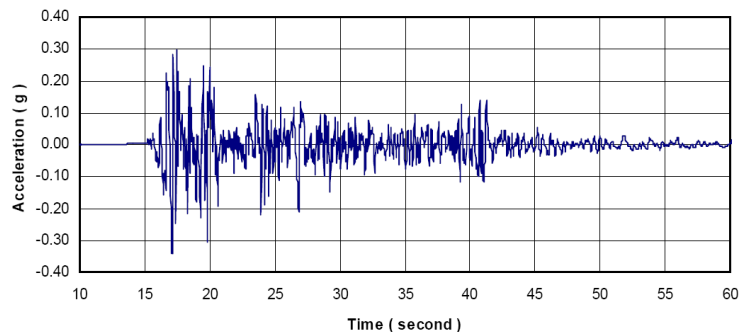
Posunutí



Rychlost



Zrychlení



El Centro 1940 – horizontální směr

Ukázka záznamů zemětřesení –
akceleroagramy - zrychlení ve svislém směru

Postupy při řešení odezvy na seizmické buzení

Řešení s využitím akceleroogramů – řešení v časové oblasti

Řešení s pomocí lineárních spekter odezvy

Řešení s využitím akceleroogramů – stejný postup jako při řešení na obecné buzení – buzení akcelogramy

Řešení s pomocí lineárních spekter odezvy

Odezva soustavy s 1SV buzené zemětřesením - spektra odezvy

Pohybová rovnice v případě buzení pohybem základu

Absolutní pohyb $u(t)$ $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{z} + kz$

Relativní pohyb $w(t)$ $m\ddot{w} + c\dot{w} + kw = -m\ddot{z}$ +

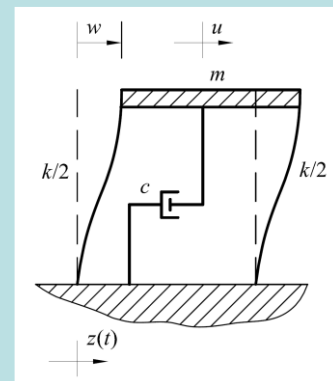
Řešením rovnice + pomocí Duhamelova integrálu lze získat $w_{\max}$ a maximum absolutního zrychlení.

Pro případ ignorování znaménka v + a rozdílu mezi ω_n a ω_d potom

$$w(t, \omega_n, \zeta) = \left(\frac{1}{\omega_n} \right) W(t), \text{ kde } W(t) = \int_0^t \ddot{z}(\tau) e^{-\xi \omega_n(t-\tau)} \sin \omega_n(t-\tau) d\tau$$

Maximální hodnota relativní výchylky se objeví v čase t_m a označuje se symbolem S_d – **spektrální výchylka**

$$S_d(T, \zeta) = w_{\max} = \left(\frac{1}{\omega_n} \right) W(t_m)$$



Graf S_d v závislosti na vlastní periodě $T = 2\pi/\omega_n$ se nazývá spektrum odezvy výchylky. $W(t)$ má rozměr rychlosti.

Maximální hodnota $W(t)$ se nazývá spektrální pseudorychlost (S_v).

Graf S_v v závislosti na periodě T se nazývá spektrum odezvy pseudorychlosti

$$S_v(T, \zeta) = W(t_m) = \omega_n S_d$$

Maximum absolutního zrychlení pro netlumenou soustavu $\ddot{u}_{\max} = \omega_n^2 w_{\max}$

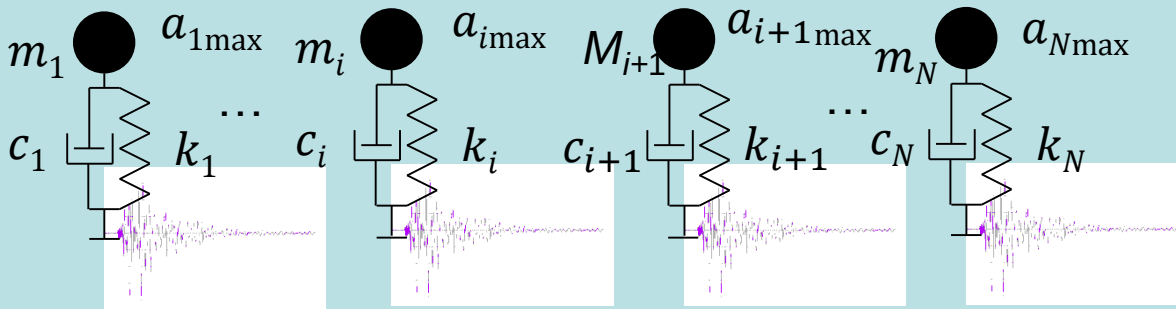
Uvedený vztah neplatí pro tlumenou soustavu, maximální absolutní zrychlení $\ddot{u}_{\max}$ slabě tlumené soustavy může být aproximováno spektrálním pseudozrychlením S_a

$$S_a(T, \zeta) = \omega_n^2 S_d = \omega_n S_v$$

Graf S_a versus T se nazývá spektrum odezvy pseudozrychlení

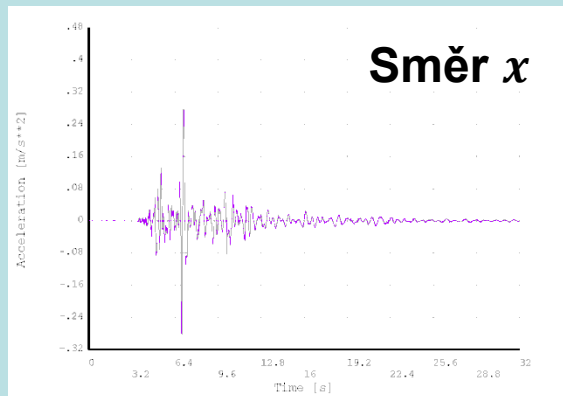
Maximální síla v pružině – kS_d

$$(f_s)_{\max} = kS_d = \left(\frac{k}{\omega_n^2}\right) S_a = mS_a$$

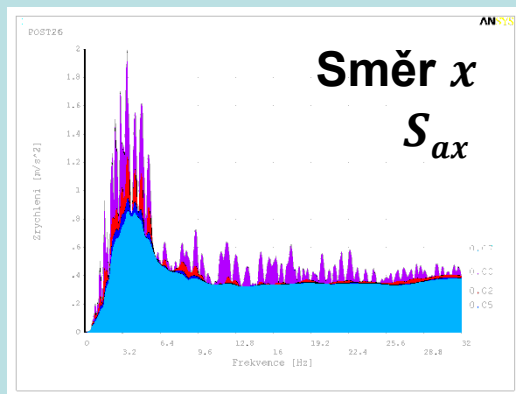


Pro frekvence (periodu) od f_1 do f_N s krokem Δf se určí max. odezva – např. zrychlení a sestaví se tabulka S_a v závislosti na f nebo T a útlumu ζ

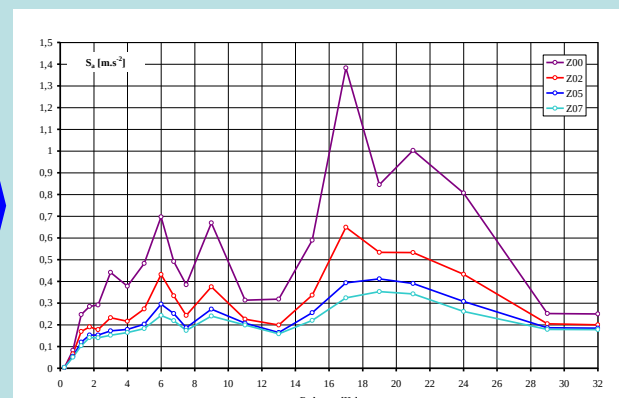
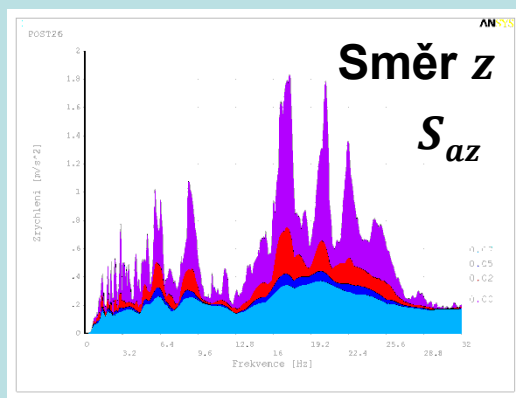
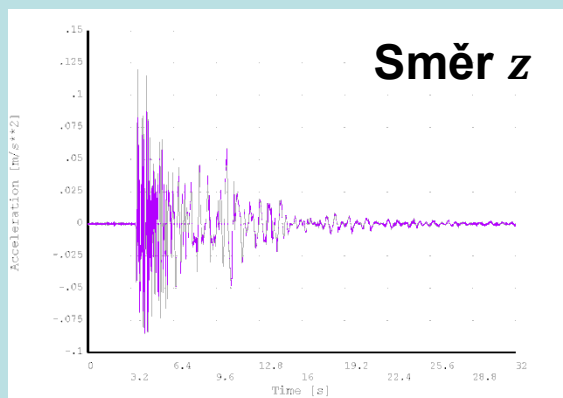
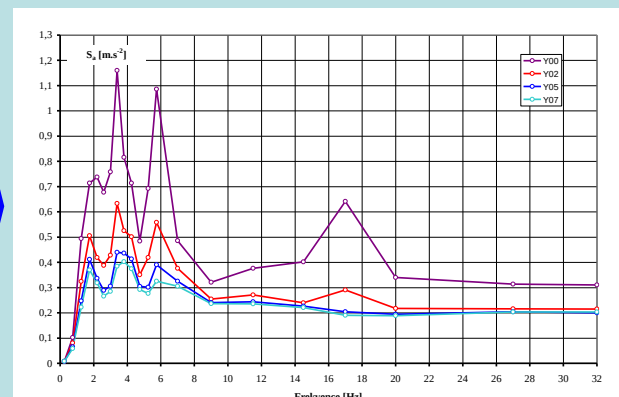
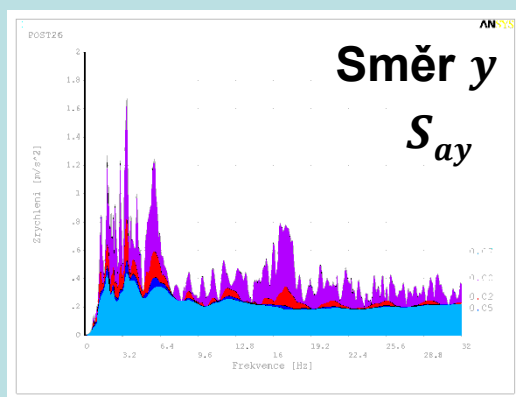
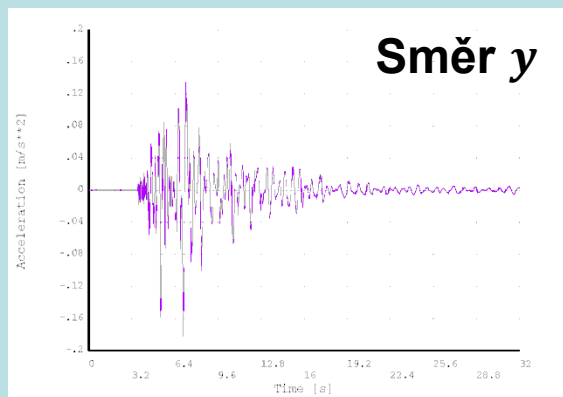
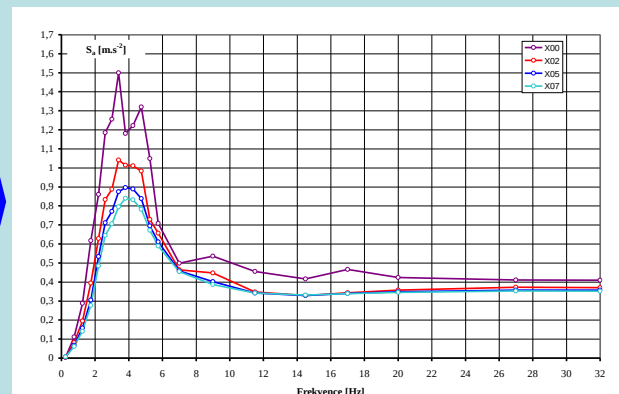
Akcelerogram



Spektrum zrychlení



Upravené spektrum zrychlení

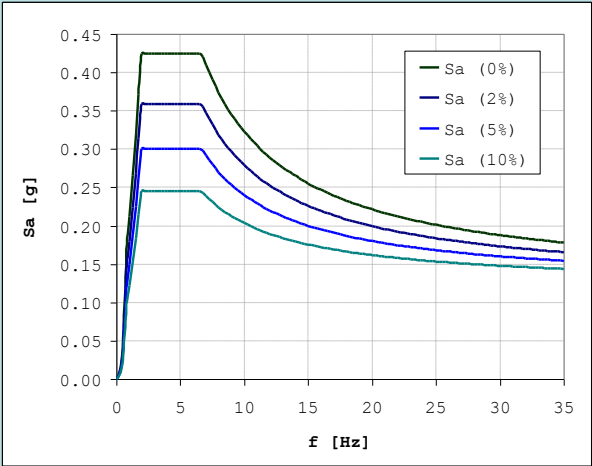


Ostré špičky a propady jsou výsledkem lokálních rezonancí a antirezonancí při pohybu základu

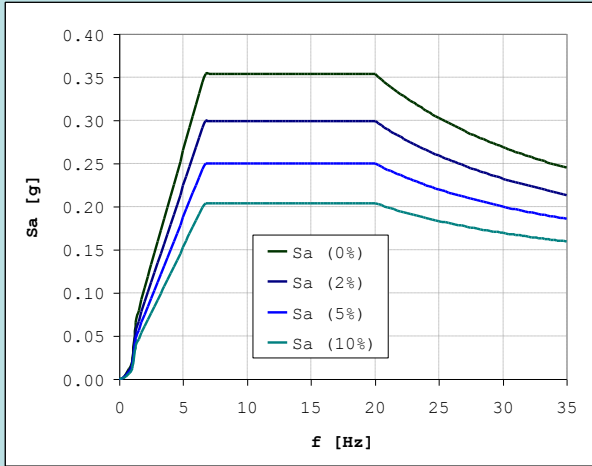
Pro návrh je nutno spektra vyhladit a normalizovat vzhledem ke standardní intenzitě

Návrhové spektra dle EC8 s různým poměrným útlumem

Horizontální směr buzení

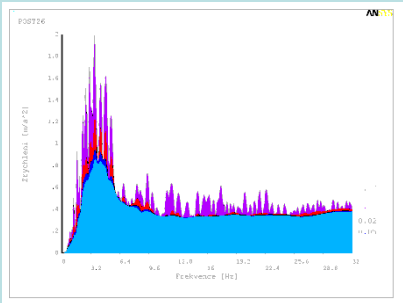


Vertikální směr buzení

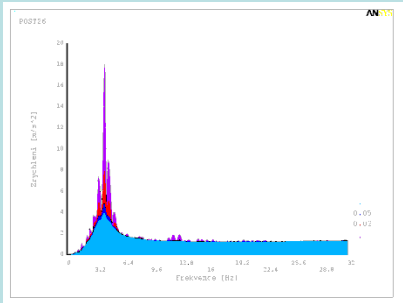


Uvedená spektra platí pro úroveň základu

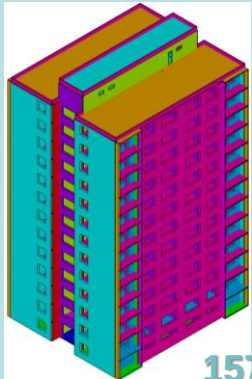
Pro posouzení konstrukcí (např. příček, technologie) je třeba získat tzv. podlažní spektra odezvy – sestavují se stejně, ale z odezvy na úrovni podlaží



Základové spektrum



Spektrum – poslední patro panelového domu

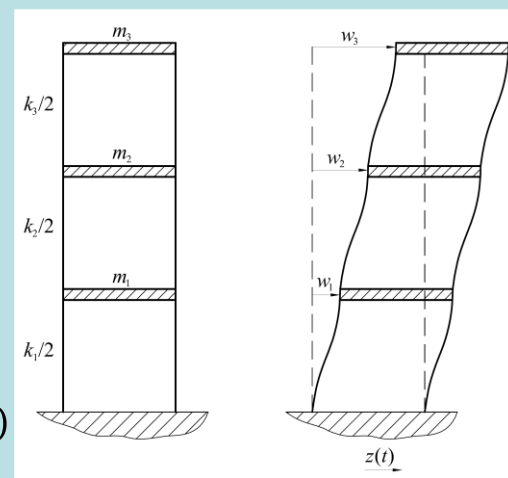


Odezva víceetupňové soustavy na buzení zemětřesením

Příklad: Třístupňové soustava – model třípatrové budovy
hmotnosti m_1, m_2, m_3 , tuhosti k_1, k_2 a k_3

Soustava pohybových rovnic v relativních souřadnicích

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{w}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{z}(t)$$



Nebo kompaktněji $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{k}\mathbf{w} = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{z}(t)$

V případě s tlumením

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{k}\mathbf{w} = \mathbf{p}_{eff}(t) \quad \text{☹️}, \text{ kde } \mathbf{p}_{eff}(t) = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{z}(t)$$

Řešení bude provedeno rozkladem podle vlastních tvarů kmitu

Transformace souřadnic

$$\mathbf{w} = \Phi \boldsymbol{\eta} = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\phi}_r \eta_r(t) \quad \text{😊}$$

Po transformaci - nezávislé rovnice

$$\ddot{\eta}_r + 2\zeta_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \left(\frac{1}{M_r} \right) P_r(t),$$

kde $P_r(t) = \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{z}(t)$ - zanedbáno znaménko oproti rovnici ☹️

Nechť $\gamma_r = \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r$ je participační faktor odpovídající vlastnímu tvaru kmitu r

Potom $P_r(t) = \gamma_r \ddot{z}(t)$

Analogicky vztahům pro jednostupňovou soustavu

$$\eta_r(t) = \left(\frac{\gamma_r}{M_r \omega_r} \right) W_r(t) \text{ ☼ }, \text{ kde } W_r(t) = \int_0^t \ddot{z}(\tau) e^{-\zeta_r \omega_r (t-\tau)} \sin \omega_r (t-\tau) d\tau$$

Sloučením rovnic ☺ a ☼

$$\mathbf{w} = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\phi}_r \left(\frac{\gamma_r W_r(t)}{M_r \omega_r} \right)$$

Uvedená rovnice je vhodná pro řešení odezvy na buzení pohybem základu metodou rozkladu podle vlastních tvarů kmitů – jako buzení jsou použity akcelerogramy (záznamy zrychlení pohybu základu)

Maximální relativní přemístění (dynamická odezva) odpovídající r -tému tvaru vyjádřené pomocí spektra odezvy (maximum pro frekvenci odpovídající r -tému tvar kmitu)

$$\max_t |\mathbf{w}_r(t)| = |\boldsymbol{\phi}_r| \left(\frac{|\gamma_r|}{M_r \omega_r} \right) S_v(T_r, \zeta_r) = |\boldsymbol{\phi}_r| \left(\frac{|\gamma_r|}{M_r} \right) S_a(T_r, \zeta_r) \quad (S_a(T, \xi) = \omega_d^2 S_d = \omega_d S_v)$$

Výsledná odezva se skládá s odezev všech tvarů kmitu.

Po vyčíslení jednotlivých odezev pro jednotlivé tvary kmitu je třeba tyto odezvy sečíst.

Objevuje se komplikace v důsledku toho, že dosažené maxima odezvy pro jednotlivé tvary nastávají v různých časech.

Potom maximum odezvy získané přímo se nerovná maximu součtu odezev získaných pomocí spektra odezvy

$$\max_t |\mathbf{w}(t)| \neq \sum_{r=1}^N \max_t |\mathbf{w}_r(t)|$$

Přímý součet jednotlivých odezev dává konzervativní výsledky. Uspokojivé přibližné maximum se velmi často definuje pomocí sumace SRSS - dobré výsledky pro oddělené frekvence

$$\max_t |\mathbf{Q}(t)| \cong \left[\sum_{r=1}^N \left(\max_t |\mathbf{Q}_r(t)| \right)^2 \right]^{1/2}, \text{ kde } \mathbf{Q} \text{ je libovolná odezvová veličina}$$

Odezva při použití modálního efektivního zrychlení $(\ddot{\mathbf{w}}_r)_{eff} = \omega_r^2 \mathbf{w}_r$ odpovídajícího r -tému tvaru kmitu

Například smykové síly přenášené na základ r -tý vlastní tvar kmitu – viz třípodl. budova

$$S_r(t) = \sum_{i=1}^N m_i (\ddot{w}_{ir})_{eff} = \sum_{i=1}^N \omega_r^2 m_i w_{ir} = \mathbf{1}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r \omega_r^2 \eta_i(t) = \mathbf{1}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r \left(\frac{\gamma_r \omega_r}{M_r} \right) W_r(t) = \left(\frac{\gamma_r^2 \omega_r}{M_r} \right) W_r(t)$$

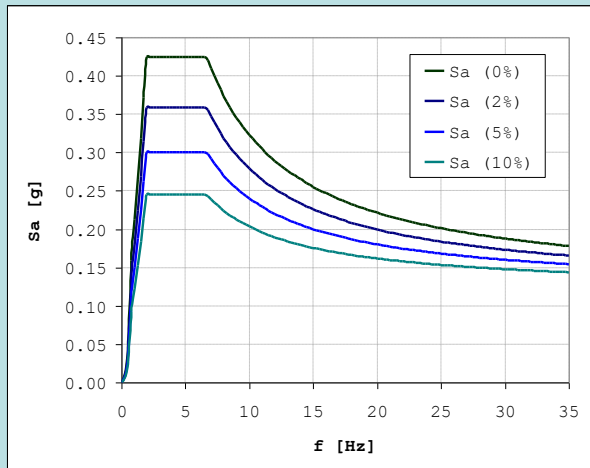
Maximum smykové síly přenášené na základ od r -tého vlastního tvaru

$$\max_t |S(t)| = \left(\frac{\gamma_r^2}{M_r} \right) S_a(T_r, \zeta_r)$$

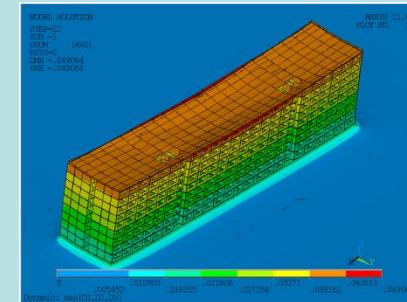
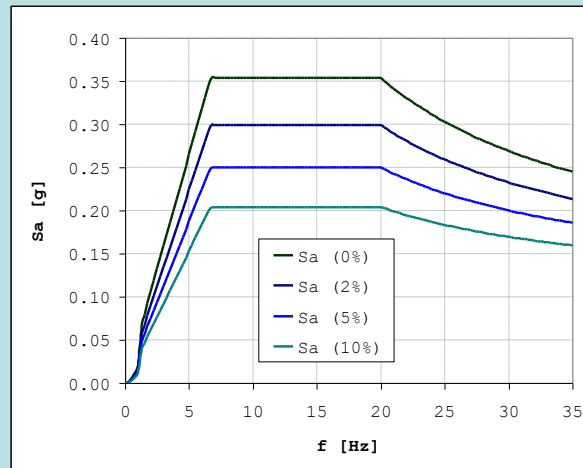
S využitím sumace odezev podle pravidla SRSS aproximace maxima smykové síly přenášené na základ

$$\max_t |\mathbf{w}(t)| = \left\{ \sum_{r=1}^N \left[\left(\frac{|\boldsymbol{\phi}_r| |\gamma_r|}{M_r \omega_r} \right) S_V(T_r, \zeta_r) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

Horizontální směr buzení

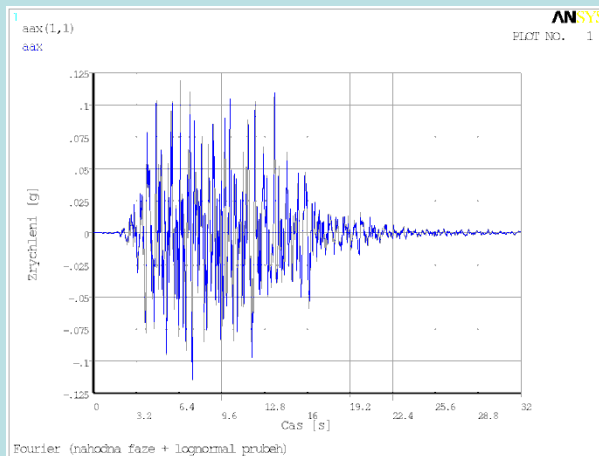


Vertikální směr buzení

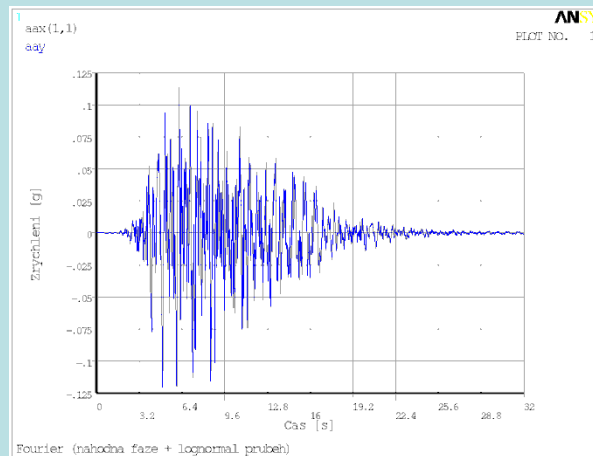


Odezva
na spektra

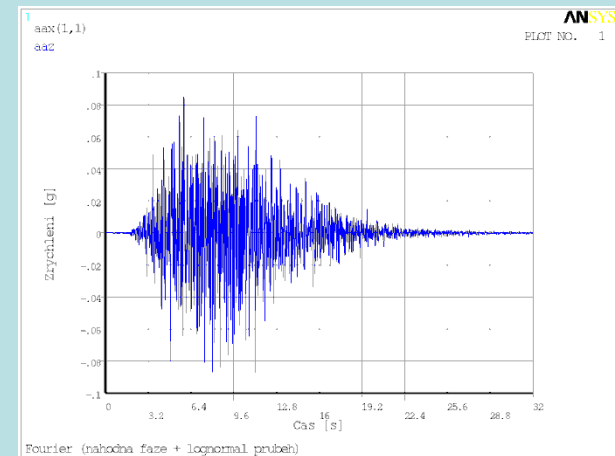
Návrhové spektra dle EC8 s různým poměrným útlumem



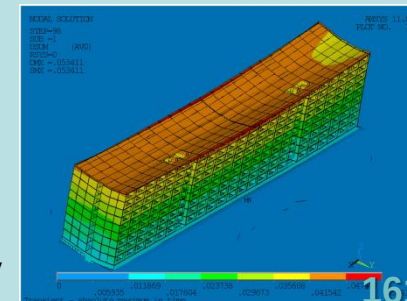
Směr x



Směr y



Směr z



Ze spekter odezev lze vytvořit tzv. syntetické akcelerogramy
- příklad syntetických akcelerogramů v časové oblasti 0 až 16 s

Odezva na syntetické akcelerogramy

Dynamické výpočty metodou konečných prvků (MKP)

Soustava pohybových rovnic v MKP

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

včetně počátečních podmínek $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ a $\dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0$

a) Modální analýza – výpočet vlastních frekvencí a tvarů kmitů

b) Řešení odezvy na obecné buzení

- přímá integrace pohybových rovnic
- metoda rozkladu podle vlastních tvarů kmitů

c) Řešení odezvy na harmonické buzení

- přímý postup $(\mathbf{k} - \Omega^2 \mathbf{m} + i\Omega \mathbf{c})\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{f}}$
- metoda rozkladu podle vlastních tvarů kmitů

d) Spektrální analýza – dynamická odezva na buzení spektry odezvy

- buzení spektry v jednom „bodu“ – jedno spektrum pro všechny základy
- buzení spektry ve více „bodech“ – pro některé základy různá spektra

Lineární dynamika a nelineární dynamika

Programy na bázi MKP

ANSYS, ABAQUS, LS-DYNA, ADINA, COSMOS, SYSTUS atd.